

Name:.....Matrikelnr:.....

Keine Skripten, Bücher, Rechner oder Handys benutzen! Tragen Sie Ihre Antworten im Angabenblatt ein.

1. (5P) Kreuzen Sie unter den folgenden Aussagen die richtigen an. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt für die Hauptzweige der Wurzeln

- (a) $|\sqrt[2]{1+it}| = \sqrt[2]{1+t}$,
- (b) $|\sqrt[2]{1+it}| = \sqrt[2]{1+|t|}$,
- (c) $|\sqrt[2]{1+it}| = \sqrt[4]{1+t^2}$,
- (d) $\arg[\sqrt[2]{1+it}] = \arctan(t/2)$,
- (e) $\arg[\sqrt[2]{1+it}] = \arctan(t)/2$.

2. (4P) Fügen Sie die richtigen Zahlenwerte ein:

- (a) Das Wegintegral der Funktion $z \mapsto 1/z$ (für alle $z \in \mathbb{C} \setminus 0$) hat den Wert $I = \dots\dots\dots$, wenn der Weg den Nullpunkt einmal im Uhrzeigersinn umläuft.
- (b) Das Wegintegral der Funktion $z \mapsto \sin(z)/z$ (für alle $z \in \mathbb{C} \setminus 0$) hat den Wert $I = \dots\dots\dots$, wenn der Weg den Nullpunkt einmal im Uhrzeigersinn umläuft.
- (c) Das Residuum der Funktion $z \mapsto 1/z^2$ (für alle $z \in \mathbb{C} \setminus 0$) hat an der Stelle 0 den Wert $R = \dots\dots$
- (d) Das Residuum der Funktion $z \mapsto \sin(z)/z^2$ (für alle $z \in \mathbb{C} \setminus 0$) hat an der Stelle 0 den Wert $R = \dots\dots$

3. (4P) Sei $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ für ein $k > 0$ die Lösung von $\square A = 0$ mit

$$A(0, x) = u(x) := e^{-k^2 x^2} \sin(kx) \text{ und } \partial_t A(0, x) = 0.$$

(a) (2P) Für $ct = 1$ gilt

$$A(t, x) = \dots\dots\dots$$

(b) (1P) Ist A eine Stehwelle? Falls ja, mit welcher Frequenz schwingt sie? $\omega = \dots\dots\dots$

(c) (1P) Ist die Gesamtenergie E von A endlich? Welches Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \dots\dots\dots dx$$

entscheidet über die Antwort?

4. (5P) Sei u eine¹ Lösung der Helmholtzgleichung $(\Delta + k^2)u = 0$ auf \mathbb{R}^3 für ein $k^2 > 0$.

(a) (2P) Wie müssen B und q gewählt werden, wenn j_l die sphärische Besselfunktion der Ordnung l bezeichnet, damit auf dem Kartenbereich der Kugelkoordinaten (r, θ, φ)

$$u = j_l(qr) \cdot B(\theta) \cdot \cos(m\varphi)$$

gilt? $B = \dots\dots\dots$ und $q = \dots\dots\dots$

(b) (2P) Welche Werte sind für l und m zulässig? $l \in \dots\dots\dots$, $m \in \dots\dots\dots$

(c) (1P) Die Funktion $B(\theta) \cdot \cos(m\varphi)$ ist dann Eigenvektor des sphärischen Laplaceoperators zum Eigenwert $\mu = \dots\dots\dots?$

¹in Kugelkoordinaten faktorisierende