Bitte keine Skripten, Bücher, Rechner oder Handys benützen!

1. (6P) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ mit
$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$
   (a) (1P) Ist f holomorph? Begründen Sie Ihre Antwort ohne Rückgriff auf Cauchy-Riemann.
   (b) (1P) Geben Sie die Potenzreihe von f um den Punkt 0 an.
   (c) (1P) Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe von f um den Punkt 0?
   (d) (1P) Geben Sie die Koeffizienten c_k Laurentreihe
$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z-1)^k$$
   von f um $z = 1$ an. Welchen Konvergenzbereich hat die Laurentreihe?
   (e) (1P) Welches Residuum hat f an der Stelle 1?
   (f) (1P) Welchen Wert hat das Wegintegral von f längs der Kreislinie um 0 mit dem Radius 2, wenn diese im Uhrzeigersinn durchlaufen wird?

2. (4P) Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Lösung von $\Box A = 0$ mit
$$A(0,x) = \frac{x}{1+x^2} \text{ und } \partial_t A(0,x) = 0.$$
   (a) (1P) Skizzieren Sie den Graphen von $x \mapsto A(0,x)$.
   (b) (2P) Geben Sie $A(t,x)$ an.
   (c) (1P) Geben Sie den Wert von $A(t,0)$ für $ct = 1$ an.

3. (6P) Sei $R = (0,L) \times (0,L)$ und sei $\psi : \mathbb{R} \times \overline{R} \to \mathbb{C}$ mit $\psi(t,x,y) = f(t)\, g(x)\, h(y)$ für alle $(t,x,y) \in \mathbb{R} \times [0,L] \times [0,L]$. Für alle $(t,x,y) \in \mathbb{R} \times (0,L) \times (0,L)$ gelte
$$i\partial_t \psi(t,x,y) = -\frac{1}{2}\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)\psi(t,x,y). \tag{1}$$
   (a) (4P) Geben Sie alle Funktionen ψ dieses Typs (mitsamt ihren Eigenfrequenzen!) an, die zur Randbedingung
$$\psi(t,x,y) = 0 \text{ für alle } (t,x,y) \in \mathbb{R} \times \partial R$$
   gehören.
   (b) (2P) Welche Lösung von Gleichung (1) gehört zur Anfangsbedingung
$$\psi(0,x,y) = \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \sin\left(3\pi \frac{y}{L}\right) - \sin\left(3\pi \frac{x}{L}\right) \sin\left(\pi \frac{y}{L}\right)?$$
   Ist dies eine Stehwelle?