Kirchhoffs, Duhamels und Fouriers Lösungsformeln

1. Die Anfangsvorgaben $u, v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zum Anfangswertproblem $\Box A = 0$, $A(0,\cdot) = u$ und $\partial_t A(0,\cdot) = v$ seien konstant gewählt und zwar i) $u = 0, v = 1$ bzw. ii) $u = 1, v = 0$. Bestimmen Sie die beiden zugehörigen Lösungen.

2. Mit $\omega, \lambda \in \mathbb{R}$ und (oE) $\omega \geq 0$ sei $j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $j(t,x) = \lambda \cos(\omega t)\,\delta^3(x)$. Dabei[1] sei δ^3 Diracs Delta-„Funktion" auf $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie für die retardierte Lösung von $\Box A = j$, nämlich

$$A_{ret}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{j\left(t - \frac{|x-y|}{c}, y\right)}{4\pi|x-y|} d^3y,$$

dass $A_{ret}(t,x) = \frac{\lambda}{4\pi|x|}\cos(\omega t - k|x|)$ für $x \neq 0$, wobei $k = \omega/c$. Zeigen Sie, dass $\Box A_{ret}(t,x) = 0$ für $x \neq 0$. A_{ret} wird daher als auslaufende, isotrope Kugelwelle bezeichnet. Sei nun T die Energiestromdichte von A_{ret}. Dann ist die Zahl

$$P(t,R) := \int_{\mathbb{S}^2} \langle T(t,Rn), n\rangle R^2 d_n\Omega$$

der gesamte Energiesstrom von A_{ret} zur Zeit t durch die Oberfläche der Kugel vom Radius R um den Mittelpunkt 0. Berechnen Sie $P(t,R)$ und zeigen Sie dann, dass mit $T := \frac{2\pi}{\omega}$ das Periodenmittel der Abstrahlungsleistung, die sogenannte mittlere Strahlungsleistung der T-periodischen Quelle j, weder von R noch von t abhängt:

$$\overline{P} := \frac{1}{T}\int_0^T P(t+t', R)\,dt' = \frac{\omega^2\lambda^2}{8\pi c}.$$

Hinweis: Unter Diracs Delta stellen Sie sich eine nichtnegative reellwertig Funktion auf $\mathbb{R}^3$ vor, deren Integral über ganz $\mathbb{R}^3$ zwar 1 ergibt, die aber nur in einer so kleinen Umgebung von 0 ungleich 0 ist, dass für jede in einer Umgebung von x stetige Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die folgende Approximation (für unsere Genauigkeitsanspüche) ausreicht

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta^3(y-x) f(y)\,dy \approx f(x).$$

Die Quelle j ist somit zu einer beliebigen Zeit t nur in einem winzigen Ortsbereich um den Punkt 0 „aktiv", also von 0 verschieden.

3. Bestimmen Sie eine Funktion $A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times (0,L) : \mathbb{R})$ mit $\Box A = 0$ und

   (a) $lim_{x\downarrow 0} A(t,x) = lim_{x\uparrow L} A(t,x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (homogene Dirichlet'sche Randbedingung),

   (b) $A(0,x) = u(x) := aL\sin\left(\pi\frac{x}{L}\right)$ und $\partial_t A(0,x) = v(x) := 2\pi bc\sin\left(2\pi\frac{x}{L}\right)$ für alle $x \in (0,L)$. Es gelte $a, b \in \mathbb{R}$. (Anfangsbedingung).

   Beachten Sie, dass $lim_{x\downarrow 0} v(x) = lim_{x\uparrow L} v(x) = 0$ und $\lim_{x\downarrow 0} u''(x) = lim_{x\uparrow L} u''(x) = 0$. Warum ist das von Bedeutung?

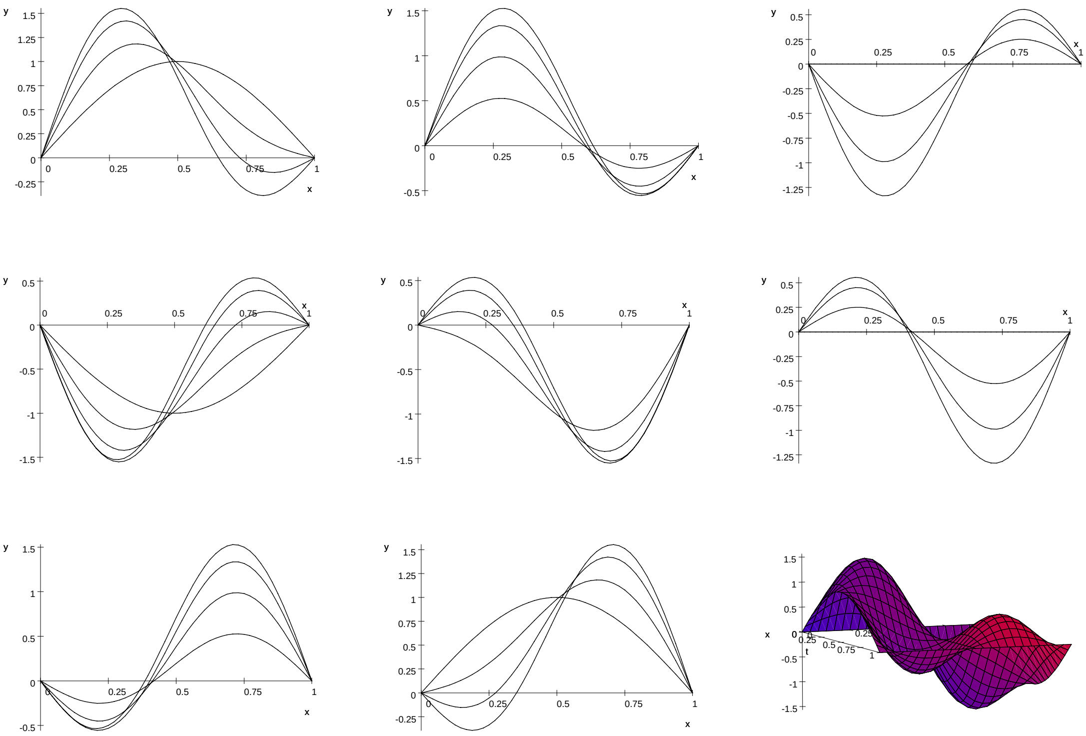
   Lösung:

$$A(t,x) = L\left\{a\cos\left(\pi\frac{ct}{L}\right)\sin\left(\pi\frac{x}{L}\right) + b\sin\left(2\pi\frac{ct}{L}\right)\sin\left(2\pi\frac{x}{L}\right)\right\}.$$

   Gibt es weitere Lösungen A? Ist für festes x die Abbildung $t \mapsto A(t,x)$ periodisch? Falls ja, hängt die (kleinste) Periode von x ab?

   Hier sind der 3d-Graph und einige Momentaufnahmen der Schwingung A/L für $ct/L = n/16$ für $n = 0, 1, 2, \ldots 32$ und für $a = b = 1$. Suchen Sie die Web-Seite http://www.falstad.com/loadedstring/ auf und hören Sie sich die Lösung an.

[1] Die Hochzahl 3 in δ^3 ist keine Potenz, sondern deutet lediglich die Dimension des Definitionsbereiches der Delta-Funktion an.


y
x
0
0.25
0.5
0.75
1
t