Erste Klausur

1. (4 Punkte) Kontrollieren Sie mittels Cauchy-Riemann ob die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = |z|^2$ holomorph ist. Gilt $\Delta \Re f = 0$?

2. (4 Punkte) Für ein $R > 0$ und ein $\varepsilon \in (0, \pi)$ sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = R \cdot e^{it}$. Skizzieren Sie den Weg von γ und berechnen Sie das Integral

$$I(R, \varepsilon) = \int_\gamma \frac{dz}{z^2}.$$

   Gegen welchen Wert konvergiert $I(R, \varepsilon)$ bei festem R für $\varepsilon \to \pi$?

3. (4 Punkte) Sei $k \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie für $k > 0$ das Integral

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{e^{ikx}}{(1 + x^2)^2} dx$$

   mittels Residuensatz. Skizzieren Sie den geschlossenen Integrationsweg, mit dem Sie arbeiten. Gegen welchen Wert konvergiert $I(k)$ für $k \searrow 0$ und gegen welchen für $k \to \infty$?

4. (4 Punkte) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^4 = i$? Skizzieren Sie die Lösungsmenge.