Klausurtrainingsblatt

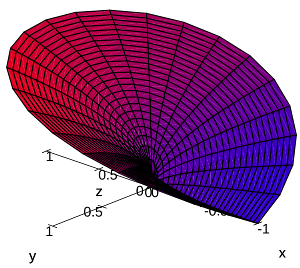
1. Kontrollieren Sie in der Halbebene $\Re z > 0$ mittels der Cauchy-Riemanngleichungen, dass dort der Hauptzweig der Logarithmusfunktion holomorph ist.

2. Ist die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/|z|^2$ holomorph? Ist die Funktion $g : \mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = \overline{z}/|z|^2$ holomorph?

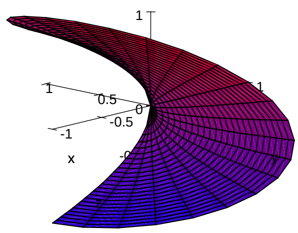
3. Sei $\varphi \in (-\pi, \pi)$ und sei $r > 0$. Für den Hauptzweig der Wurzelfunktion gilt dann

$$\sqrt{re^{i\varphi}} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

   Seien nun für $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ die Funktionen u, v auf der geschlitzten Ebene so, sodass $u(x, y) = \sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}$ und $v(x, y) = \sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}$ gilt. Kontrollieren Sie mittels des Laplaceoperators in den Polarkoordinaten, dass u, v harmonisch sind. Warum sind sie das?



Polarplot von u



Polarplot von v

4. Für ein $R > 0$ und ein $\varepsilon \in (0, \pi)$ sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = R \cdot e^{it}$. Berechnen Sie $\lim_{\varepsilon\to\pi} \int_\gamma \ln(z)\, dz$. Hinweis: Sie kennen auf einer offenen Umgebung des Bildes von γ eine Stammfunktion von $\ln$.

5. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(1+x^2)^2} dx$$

   für $k \in \mathbb{R}$ mittels Residuensatz.

6. Welches Vorzeichen hat $\Re\sqrt{e^{-i\pi/4}}$, wenn $\sqrt{\cdot}$ der Hauptzweig der Wurzelfunktion ist?

7. Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^3 = -1$?

Lösungen zum Klausurtrainingsblatt

1. Auf der rechten Halbebene $\mathbb{H}_{\Re>0}$, d.h. für $\Re z = x > 0$, gilt mit $y = \Im z$, $u(x,y) = \Re \ln(z)$ und $v(x,y) = \Im \ln(z)$
$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) \text{ und } v(x,y) = \arctan\frac{y}{x},$$
wobei arctan die Umkehrfunktion von tan auf $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ist. (Siehe Blatt 1, Bsp. 1)
Somit gilt auf $\mathbb{H}_{\Re>0}$
$$\begin{aligned}
\partial_x u(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \partial_y u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2},\\
\partial_x v(x,y) &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2},\\
\partial_y v(x,y) &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$
Somit gelten auf $\mathbb{H}_{\Re>0}$ die Cauchy-Riemanngleichungen
$$\partial_x u = \partial_y v \text{ und } \partial_y u = -\partial_x v.$$

2. Wäre f holomorph, dann wäre auch die komplexe Konjugation $C : z \mapsto \frac{1}{zf(z)} = \overline{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus 0$ holomorph. Das ist nicht der Fall. (Nach Vorlesung) Für g gilt $g(z) = 1/z$. Diese Funktion ist laut Vorlesung holomorph.

3. Es gilt (siehe: 2d Laplace-operator in Polarkoordinaten)
$$\begin{aligned}
\left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)u(x,y) &= \left(\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\right)+\frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\right)\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\\
&= \frac{1}{r}\partial_r\left(r\frac{1}{2r^{1/2}}\right)\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{\sqrt{r}}{r^2}\frac{1}{4}\cos\frac{\varphi}{2}\\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{4r^{1/2}}\right)\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4r^{3/2}}\cos\frac{\varphi}{2} = 0.
\end{aligned}$$
Ersetze nun $\cos\frac{\varphi}{2}$ durch $\sin\frac{\varphi}{2}$. Dann ergibt sich mit $\sin'' = -\sin$, dass v genau so wie u harmonisch ist. Sie sind dies, weil die Hauptzweigwurzel $\sqrt{\cdot}$ auf der geschlitzten Ebene holomorph ist, und u bzw. v der Real-bzw. Imaginärteil von $\sqrt{\cdot}$ sind.

4. Da ln auf der geschlitzten Ebene die Funktion $F(z) = z(\ln(z)-1)$ zur Stammfunktion hat, gilt
$$\begin{aligned}
\int_\gamma \ln(z)\,dz &= F(\gamma(\varepsilon)) - F(\gamma(-\varepsilon)) = F\left(R\cdot e^{i\varepsilon}\right) - F\left(R\cdot e^{-i\varepsilon}\right)\\
&= R\cdot e^{i\varepsilon}\left(\ln(R)+i\varepsilon-1\right) - R\cdot e^{-i\varepsilon}\left(\ln(R)-i\varepsilon-1\right)\\
&= R\left[\left(2i\left(\ln(R)-1\right)\sin(\varepsilon)+2i\varepsilon\cos\varepsilon\right)\right] \to -2i\pi R \text{ für } \varepsilon\to\pi.
\end{aligned}$$

5. Der Integrand hat jeweils einen Pol zweiter Ordnung bei $\pm i$. Für $k \geq 0$ gilt in der oberen Halbebene $\mathbb{H}_{\Im\geq 0}$, d.h. für $\Im z \geq 0$, die Abschätzung $\left|e^{ikz}\right| \leq 1$. Weiter kann für $|z| > 2$ (erst inverse Dreiecksungleichung, dann Dreiecksungleichung) der Betrag des Nenners folgendermaßen nach unten abgeschätzt werden
$$\begin{aligned}
\left|\left(1+z^2\right)^2\right| &= \left|1+2z^2+z^4\right| \geq \left||z|^4 - \left|1+2z^2\right|\right|\\
&\geq \left||z|^4 - \left(1+2|z|^2\right)\right| \geq \left||z|^4 - \frac{|z|^4}{2}\right| = \frac{|z|^4}{2}.
\end{aligned}$$

Daher gilt für alle Punkte z auf einem Halbkreisbogen in $\mathbb{H}_{\Im\geq 0}$ um den Mittelpunkt 0 mit dem Radius $R > 2$

$$\left|\frac{e^{ikz}}{\left(1+z^2\right)^2}\right| \leq \frac{2}{R^4}.$$

Daraus folgt für einen Halbkreisbogen γ mit Radius R um 0 in der oberen Halbebene

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\gamma \frac{e^{ikz}}{\left(1+z^2\right)^2}dz\right| \leq \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \left|\frac{e^{ik\gamma(t)}}{\left(1+\gamma(t)^2\right)^2} ie^{it}R\right| dt \leq \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \frac{2Rdt}{R^4} = \lim_{R\to\infty}\frac{2\pi}{R^3} = 0.$$

Also gilt nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ikx}}{\left(1+x^2\right)^2}dx &= \lim_{R\to\infty}\left\{\int_{-R}^R \frac{e^{ikx}}{\left(1+x^2\right)^2}dx + \int_{\gamma_R}\frac{e^{ikz}}{\left(1+z^2\right)^2}dz\right\} \\ &= 2\pi i \mathrm{Res}_i\left(\frac{e^{ikz}}{\left(1+z^2\right)^2}\right).\end{aligned}$$

Das Residuum der holomorphen Funktion

$$z \mapsto \frac{e^{ikz}}{\left(1+z^2\right)^2} = \frac{e^{ikz}}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{g(z)}{(z-i)^2}$$

bei i ergibt sich zu $g'(i)$. (Satz 27 im Skriptum) Daher gilt

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ikx}}{\left(1+x^2\right)^2}dx = 2\pi i g'(i)$$

Es gilt also $g(z) = \frac{e^{ikz}}{(z+i)^2}$ für alle $z \neq -i$.
Die Ableitung von g ergibt sich mit der Quotientenregel zu

$$g'(z) = \frac{(z+i)^2 ike^{ikz} - 2(z+i)e^{ikz}}{(z+i)^4} = \frac{(z+i)^2 ik - 2(z+i)}{(z+i)^4}e^{ikz}.$$

Somit gilt

$$g'(i) = \frac{(2i)^2 ik - 2(2i)}{(2i)^4}e^{iki} = e^{-k}\frac{-4ik-4i}{16} = -ie^{-k}\frac{k+1}{4}.$$

Daraus folgt nun für $k \geq 0$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ikx}}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-k}(1+k).$$

Das Integral für $k < 0$ erhält man aus jenem für $k > 0$ durch komplexe Konjugation. Also gilt für alle $k \in \mathbb{R}$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ikx}}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-|k|}(1+|k|).$$

6. Für alle z aus der geschlitzten Ebene gilt $\Re\sqrt{z} > 0$. Also ist auch $\Re\sqrt{e^{-i\pi/4}} > 0$. Genauer:

$$\sqrt{e^{-i\pi/4}} = e^{-i\pi/8} = \cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}.$$

7. Eine Lösung z von $z^3 = -1$ ist $z_0 = -1$. Alle weiteren Lösungen erhält man aus z_0 durch Multiplikation mit den dritten Einheitswurzeln $z_i^3 = 1$. Es sind dies die Zahlen

$$1, e^{i2\pi/3}, e^{-i2\pi/3}.$$

Also ist die Lösungsmenge von $z^3 = -1$ durch $\left\{-1, -e^{i2\pi/3}, -e^{-i2\pi/3}\right\} = \left\{-1, e^{-i\pi/3}, e^{i\pi/3}\right\}$ gegeben.