Gauß'sche Integrale

1. Sei $u : (\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i t}} e^{i\frac{x^2}{2t}}.$$

Die Funktion $\sqrt{\cdot}$ bezeichnet hier und im Folgenden den Hauptzweig der (komplexen) Quadratwurzel. Kontrollieren Sie mithilfe der Formel für Gauß'sche Integrale, dass für alle $t \neq 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\, dx = 1.$$

Zeigen Sie weiter, dass für alle $(t,x) \in (\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R}$

$$i\partial_t u(t,x) = -\frac{1}{2}\partial_x^2 u(t,x). \tag{1}$$

Die Funktion u ist also (auf ihrem gesamten Definitionsbereich) eine Lösung der parameterreduzierten, freien, 1d Schrödingergleichung.

2. Die Funktion $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit

$$\phi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1+it}} e^{-\frac{x^2}{2(1+it)}}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ eine Lösung von Gleichung (1). Rechnen Sie das nach. Zeigen Sie weiter, dass für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t,x)|^2\, dx = \sqrt{\pi}.$$

3. Für die Funktionen u und ϕ der beiden vorangehenden Beispiele gilt für alle $(t,x) \in (\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R}$

$$\phi(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x-y)\, \phi(0,y)\, dy.$$

Zeigen Sie das.

Hinweis: Nach geeigneter quadratischer Ergänzung ist die Gauß-Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+\beta)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

anwendbar. Dabei gilt $\beta \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\Re\alpha > 0$.