

---

Holomorphie; Potenzreihe von  $\ln$  um 1; komplexe Kurvenintegrale

1. Für welche  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  existiert eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , sodass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$

$$(\Re f)(x + iy) = x^2 + 2axy + by^2 \quad (1)$$

gilt? Geben Sie zu jedem solchen Paar  $(a, b)$  alle holomorphen Funktionen  $f$  an, für die Gleichung (1) gilt.

Hinweis: Was lässt sich aus  $\Delta(\Re f) = 0$  über  $b$  erschließen? Lösen Sie dann mit diesem Wissen die Cauchy-Riemann Gleichungen.

2. Sei  $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  und  $f : K_1 \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = 1/(1+z)$ . Dann gilt für alle  $z \in K_1$

$$f(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

Ersetzen Sie nun in dieser geometrischen Reihe jeden der Summanden  $(-1)^n z^n$  durch seine jeweilige Stammfunktion  $(-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ . Die so entstehende Reihe ist durch die geometrische Reihe, die den Konvergenzradius 1 hat, majorisiert. (Warum?) Sie definiert somit auf  $K_1$  die holomorphe Funktion<sup>1</sup>  $F : K_1 \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

$F$  ist nach dem Satz von der gliedweisen Differenzierbarkeit von Potenzreihen eine Stammfunktion von  $f$ . Eine solche ist aber auch die Funktion  $z \mapsto \ln(1+z)$  auf  $K_1$ . Warum gilt  $F(z) = \ln(1+z)$  für alle  $z \in K_1$ ? Welche Potenzreihe hat die Funktion  $\ln$  um einen Punkt  $x \in \mathbb{C}$  mit  $x = \Re x > 0$ ? Wenden Sie den Trick der gliedweisen Integration nun auf die Funktion  $F$  an. Zeigen Sie, dass Sie so die Stammfunktion

$$z \mapsto (1+z) \ln(1+z) - z$$

von  $F$  auf  $K_1$  erhalten.

3. Sei  $R > 0$  und  $\gamma_1 : [-2R, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto t + R$ . Weiter sei  $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto R \cdot \exp(it)$ . Die Kurve  $\gamma : [-2R, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \leq 0 \\ \gamma_2(t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

parametrisiert daher einen in der oberen komplexen Halbebene liegenden Halbkreis um 0 (samt Durchmesser). Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(x + iy) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$  für  $x, y \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \frac{2R^3}{3} (2 - \alpha).$$

Beachten:  $f$  ist holomorph  $\Leftrightarrow \alpha = 2 \Leftrightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

---

<sup>1</sup>Für  $z = 1$  spezialisiert sich die Potenzreihe von  $F(z)$  auf die alternierende harmonische Reihe  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ . Diese konvergiert nach dem Leibnizkriterium. Nach dem Abel'schen Grenzwertsatz konvergiert sie (wie naiv zu erwarten ist) gegen  $\ln(2)$ . (O. Forster, Analysis 1, §22) Für  $z = -1$  hingegen spezialisiert sich die Reihe  $-F(z)$  zur harmonischen Reihe  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ . Diese divergiert. (O. Forster, Analysis 1, § 7)