Zweite Klausur

*Name:*__________________________ *Matrikelnr:* ________________________

Sie können die Lösungsformeln der Vorlesung verwenden, ohne sie abzuleiten!

1. Eine am Rand eingespannte Saite der Länge L erfülle zur Zeit $t = 0$ die Anfangsvorgabe

$$A(0,x) = 0 \text{ und } \partial_t A(0,x) = \sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right) \text{ für alle } x \in [0,L].$$

   (a) (4P) Geben Sie die Modenentwicklung der zugehörigen Lösung von $\Box A = 0$ auf $\mathbb{R} \times (0,L)$ an.

   (b) (1P) Welche Frequenzen kommen in der Modenentwicklung vor? Ist die Lösung periodisch in t? Falls ja, geben Sie die kleinste Periode an.

   (c) (1P) Geben Sie die Grundfrequenz $\nu_1 = \omega_1/2\pi$ der Saite in Herz an, wenn $c = 1000m/s$ und $L = 1m$.

2. Sei $R = (0,\pi) \times (0,\pi)$ und sei $u : \overline{R} \to \mathbb{R}$ stetig und harmonisch[1] auf R. Zudem gelten die Randvorgaben $u(x,\pi) = \sin^3 x + 2\sin x$ und $u(x,0) = 0$ für alle $x \in [0,\pi]$, sowie $u(0,y) = 0 = u(\pi,y)$ für alle $y \in [0,\pi]$.

   (a) (4P) Geben Sie u an. Skizzieren Sie u.

   (b) (1P) In welchem Punkt von $\overline{R}$ ist u maximal?

   (c) (1P) Geben Sie die Nullstellenmenge von u in R an.

3. Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion mit $\Box A = 0$. Es gelte $u(x) \equiv A(0,x)$ und $v(x) \equiv \partial_t A(0,x) = -c\partial_x A(0,x) = -cu'(x)$.

   (a) (3P) Leiten Sie daraus ab, dass

$$A(t,x) = u(x - ct) \text{ für alle } t, x \in \mathbb{R}.$$

   (b) (1P) Skizzieren Sie den Graphen von $A(t,\cdot)$ für $ct = \pi/2$, wenn $A(0,x) = \sin^{100}(x)$ gilt.

[1] Es gilt also $\Delta u = 0$ auf R.