Klausurtrainingsblatt

1. Eine am Rand eingespannte Saite der Länge π erfülle zur Zeit $t = 0$ die Anfangsvorgabe

$$A(0,x) = \sin^3(x) \text{ und } \partial_t A(0,x) = 0 \text{ für alle } x \in [0,\pi].$$

   (a) Geben Sie die Lösung von $\Box A = 0$ auf $\mathbb{R} \times (0,\pi)$ an.

   (b) Welche Frequenzen kommen in der Modenentwicklung der Lösung vor?

   (c) Welche Frequenzen kommen in der Modenentwicklung der Lösung vor, wenn die Anfangsvorgabe $A(0,x) = \sin^3(x)$ in $A(0,x) = \sin^4(x)$ abgeändert wird?

   Hinweis: $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

2. Bestimmen Sie alle $\mathcal{C}^2$-Funktionen der Art $\psi : \mathbb{R} \times (0,a) \times (0,b) \to \mathbb{C}$ mit $\psi(t,x,y) = e^{-i\omega t} g(x) h(y)$ mit $\omega \in \mathbb{R}$, sodass

$$i\partial_t \psi = -\frac{1}{2}\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)\psi$$

   und $\psi(t,x,y) \to 0$ für $(x,y) \to$ einen Randpunkt des Rechtecks $(0,a) \times (0,b)$. Geben Sie zu jeder Eigenmode die zugehörige Eigenfrequenz ω an. Existieren negative Eigenfrequenzen?

Lösung

1. Nach dem Fourierschen Lösungssatz gilt für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times (0,\pi)$

$$A(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right) \sin(nx),$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten A_n, B_n durch die Anfangsvorgabe für $A(0,x)$ und $\partial_t A(0,x)$ gemäß

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} A(0,x) \cdot \sin(nx)\, dx, \\ B_n &= \frac{2}{cn\pi} \int_0^{\pi} \partial_t A(0,x) \cdot \sin(nx)\, dx \end{aligned}$$

festgelegt sind. Die Eigenfrequenzen erfüllen $\omega_n = nc$.

(a) Für die Eigenmoden $g_n(x) = \sin(nx)$ gilt nach der Vorlesung

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g_n(x)\, g_m(x) = \delta_{n,m}.$$

Wegen $A(0,x) = \sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ folgt somit

$$A_1 = \frac{3}{4}, A_3 = -\frac{1}{4}$$

und $A_n = 0$ für $n \notin \{1,3\}$. Offenbar gilt $B_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit folgt

$$A(t,x) = \frac{1}{4}\left[3\cos(ct)\sin(x) - \cos(3ct)\sin(3x)\right].$$

(b) In dieser Modenentwicklung von A kommen also nur die Grundfrequenz $\omega_1 = c$ und die dritte harmonische $\omega_3 = 3\omega_1$ vor.

(c) Wird $A(0,x) = \sin^4(x)$ gewählt, dann folgt

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4(x) \cdot \sin(nx)\, dx.$$

Da $x \mapsto \sin^4(x)$ bei Spiegelung an $\pi/2$ gerade ist, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $A_{2n} = 0$. Für A_{2n+1} ist eine genauere Rechnung nötig. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4(x) \cdot \sin((2n+1)x)\, dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \left[\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\right] \sin((2n+1)x)\, dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \Im \int_0^{\pi} \left[\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\right] e^{i(2n+1)x} dx. \end{aligned}$$

Berechne nun die drei Anteile. Der erste ist

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \cos(4x)\, e^{i(2n+1)x} dx = \int_0^{\pi} \frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} e^{i(2n+1)x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{e^{i(2n+5)x}}{2} dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{i(2n-3)x}}{2} dx \\ &= \left.\frac{e^{i(2n+5)x}}{2i(2n+5)}\right|_0^{\pi} + \left.\frac{e^{i(2n-3)x}}{2i(2n-3)}\right|_0^{\pi} \\ &= \frac{i}{2n+5} + \frac{i}{2n-3}. \end{aligned}$$

Somit gilt $\Im I = \frac{1}{2n+5} + \frac{1}{2n-3}$. Der zweite ergibt sich analog zu

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi \cos(2x)\, e^{i(2n+1)x} dx \\ &= \frac{i}{2n+3} + \frac{i}{2n-1}. \end{aligned}$$

Also gilt $\Im J = \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n-1}$. Für den dritten Teil folgt

$$K = \int_0^\pi e^{i(2n+1)x} dx = \left. \frac{e^{i(2n+1)x}}{i(2n+1)} \right|_0^\pi = \frac{2i}{2n+1}.$$

Somit gilt $\Im K = \frac{2}{2n+1}$.
Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= \frac{1}{4\pi}\left[\Im I - 4\Im J + 3\Im K\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2n+5} + \frac{1}{2n-3} - \frac{4}{2n+3} - \frac{4}{2n-1} + \frac{6}{2n+1}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2n-3} - \frac{4}{2n-1} + \frac{6}{2n+1} - \frac{4}{2n+3} + \frac{1}{2n+5}\right]. \end{aligned}$$

Es gilt $A_3 < 0$ und $A_{2n+1} > 0$ für alle $n \geq 2$. Daher kommen in der Modenentwicklung alle ungeradzahligen Vielfachen der Grundfrequenz vor.

2. Einsetzen des Ansatzes $\psi(t,x,y) = e^{-i\omega t} g(x)\, h(y)$ in die Differentialgleichung ergibt, dass diese genau dann erfüllt ist, wenn

$$g''(x)\, h(y) + g(x)\, h''(y) + 2\omega g(x)\, h(y) = 0.$$

Division durch $g(x)\, h(y)$ an Punkten x, y mit $g(x)\, h(y) \neq 0$ ergibt

$$\frac{g''(x)}{g(x)} + \frac{h''(y)}{h(y)} + 2\omega = 0.$$

Somit löst ψ die Differentialgleichung genau dann, wenn zwei reelle Konstanten λ_1, λ_2 mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\omega$ existieren, für die

$$g''(x) + \lambda_1 g(x) = 0, \quad h''(y) + \lambda_2 h(y) = 0.$$

g und h können nur dann nicht die Nullfunktion sein und die homogene Randvorgabe erfüllen, wenn $\lambda_1 = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2$ und $\lambda_2 = \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2$ für zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$. Die zu zwei solchen Zahlen gehörigen Funktionen g und h sind dann reelle Vielfache von

$$g_m(x) = \sin\left(m\frac{\pi x}{a}\right) \text{ bzw } h_n(y) = \sin\left(n\frac{\pi y}{b}\right).$$

Also existieren die Eigenmoden

$$u_{m,n}(x,y) = \sin\left(m\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(n\frac{\pi y}{a}\right)$$

für die gegebene Differentialgleichung samt Randvorgabe. Die Eigenfrequenz von $u_{m,n}$ erfüllt

$$\omega_{m,n} = \frac{\pi^2}{2}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right] > 0.$$

Für einen negativen Wert von λ_1 oder auch λ_2 lässt sich die Randvorgabe nicht erfüllen. Daher existieren keine negativen Eigenfrequenzen. (Dies sagt uns auch schon die allgemeine Theorie des Laplaceoperators auf beschränkten Gebieten mit homognen Randvorgaben.)