
Zugeordnete Legendrefunktionen, erzeugende Funktion der Legendrepolynome

1. Die Funktionen $P_l^m : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit

$$P_l^m(x) := \frac{\left(1-x^2\right)^{m/2}}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+l} \left(x^2-1\right)^l$$

für $l \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit $|m| \leq l$ heißen zugeordnete Legendrefunktionen. Berechnen und skizzieren Sie die Funktionen P_1^m, P_2^m für $m > 0$. Kontrollieren Sie

$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m.$$

Überprüfen Sie, ob P_1^m Lösungen der Legendre'schen DG zum Parameter $\lambda = 2$ sind.

$$\left(1-x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right) y(x) = 0.$$

2. Sei $\Phi_{l,m} = r^l P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi} : U \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\Phi_{l,m}$ und $\Phi_{l,m}/r^{2l+1}$ harmonisch auf U sind. Geben Sie für $l = 1, 2$ und $0 \leq m \leq l$ die kartesischen Kartenausdrücke von $\Phi_{l,m}$ an. Sind diese vom Kartenbereich U der Kugelkoordinaten (r, θ, φ) stetig auf $\mathbb{R}^3$ fortsetzbar? Falls ja, sind die Fortsetzungen harmonisch auf $\mathbb{R}^3$?

3. Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ mit $|y| < |x|$ und mit $\langle x, y\rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos(\theta)$. Dann gilt[1]

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x|} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{|y|}{|x|}\right)^l \cdot P_l(\cos(\theta)). \tag{1}$$

Beweisen Sie diese Behauptung in den folgenden drei Schritten:

(a) Zeigen Sie zunächst, dass für die Funktion $g_y : \mathbb{R}^3 \setminus y \to \mathbb{R}$ mit $g_y(x) = |x-y|^{-1}$ im Gebiet $|x| > |y|$

$$g_y(x) = \frac{1}{|x|} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{|y|}{|x|}\right)^l \cdot C_l(\cos(\theta))$$

mit stetigen Funktionen $C_l : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gilt.

(b) g_y ist harmonisch auf $\mathbb{R}^3 \setminus y$. Leiten Sie daraus ab, dass C_l eine Lösung der Legendre'schen DG mit $\lambda = l(l+1)$ und $m = 0$ ist.

(c) Verifizieren Sie durch Spezialisierung der Reihenentwicklung von $g_y(x)$ auf den Fall $x = \alpha y$ mit $\alpha > 1$, dass $C_l(1) = 1$. Damit gilt also $C_l = P_l$ auf $[-1,1]$.

Bemerkung: g_y heißt daher die „erzeugende Funktion" der Legendrepolynome. Sie gibt bis auf einen konstanten Faktor das elektrische Potentialfeld, das eine in y ruhende Punktladung mit sich trägt. Gleichung (1) gibt in der Elektrostatik die Multipolentwicklung dieser Potentialfunktion im Bereich $|x| > |y|$. (Außenraumentwicklung)

---

[1] Der Austausch von x mit y ergibt eine analoge Formel für den Fall $|x| < |y|$.