

Besselfunktionen¹

1. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Seien $c_k \in \mathbb{R}$ so, dass die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ einen Konvergenzradius $\rho > 0$ habe. Es gelte $c_0 \neq 0$. Für die Funktion $y : (0, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gelte die Besselsche Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y(x) = 0. \quad (1)$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\alpha = m$ und

$$\frac{y(x)}{c_0 x^m} = 1 - \frac{(x/2)^2}{(m+1)} + \frac{(x/2)^4}{2!(m+1)(m+2)} - \frac{(x/2)^6}{3!(m+1)(m+2)(m+3)} + \dots$$

folgt, und somit

$$y(x) = c_0 x^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{m!}{k!(m+k)!} = (c_0 2^m m!) J_m(x)$$

für alle $x \in (0, \rho)$. Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Reihe ∞ ist. Geben Sie die Spezialisierungen der Reihe auf $m = 0$ und $m = 1$ an. Figur 1 zeigt J_m für $m = 0, 1, 2$ (rot, grün, magenta) und die Cosinusfunktion. Für $\nu \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ ist definiert: $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} (x/2)^{2k+\nu}$.

- (b) Für $-\nu \in \mathbb{N}$ ist die Besselsche Reihenformel unsinnig, da $\Gamma(z)$ für $z \in -\mathbb{N}_0$ nicht definiert ist. Wegen $\lim_{z \rightarrow -n \in \mathbb{N}_0} 1/\Gamma(z) = 0$ definiert man dann

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}.$$

Zeigen Sie $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ mit der Substitution $j = k - m$.

Die Funktion J_{-m} ergänzt also J_m nicht zu einem Fundamentalsystem der Besselgleichung (1). Mitteilung ohne Beweis: Ist y eine von J_m linear unabhängige Lösung von Gleichung (1) auf einem Intervall $(0, \rho)$, so hat y im Gegensatz zu J_m keine stetige Fortsetzung nach $x = 0$. Für $m \in \mathbb{N}$ gilt nämlich $\lim_{x \rightarrow 0} x^m y(x) \neq 0$ und für $m = 0$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) / \ln(x) \neq 0$. (Siehe Neumannfunktion N_m)

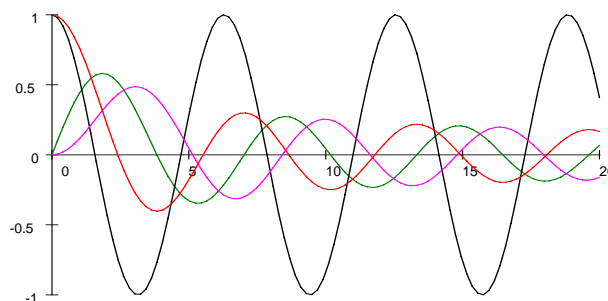


Figure 1: Die Besselfunktionen J_m für $m = 0, 1, 2$ und \cos

¹Nach Friedrich Wilhelm Bessel, 1784 - 1846; <http://de.wikipedia.org/wiki/Bessel>

2. Sei $\nu \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Leiten Sie aus der Reihenformel ab, dass $J_{\nu \pm 1}(x) = \nu \frac{J_\nu(x)}{x} \mp J'_\nu(x)$.
3. Sei $\nu^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$ gelte auf $\mathbb{R}_{>0}$ die Besselsche Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x) = 0.$$

Zeigen Sie, dass für $u : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x) = \sqrt{x}y(x)$ für alle $x > 0$

$$u''(x) + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right)u(x) = 0.$$

Für große x nähert sich $\sqrt{x}y(x)$ daher einer Linearkombination von \sin und \cos .

4. Ermitteln Sie maschinell für $l = 0, 1, 2$ die drei kleinsten Nullstellen der Besselfunktion $J_{l+1/2}$.
5. Zeigen Sie, dass in der kleinsten Nullstelle von $J_{l+1/2}$ die Ableitung von $J_{l+1/2}$ negativ ist. $J_{l+1/2}$ wechselt dort also von positiven Werten zu negativen. Machen Sie sich damit plausibel, dass die kleinste Nullstelle von $J_{l+1/2}$ monoton steigend in l ist.

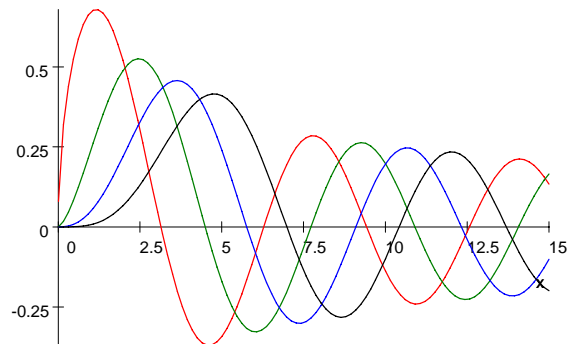


Figure 2: Die Besselfunktionen $J_{l+1/2}$ für $l = 0, 1, 2, 3$ in rot, grün, blau, schwarz

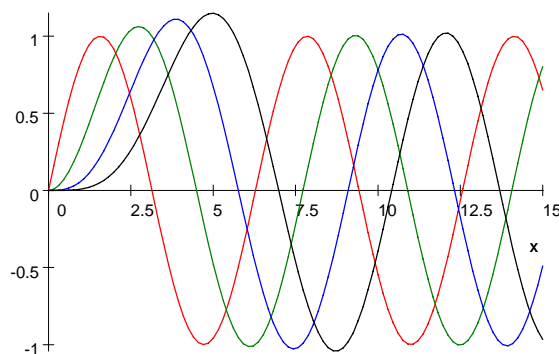


Figure 3: Die Funktionen $\sqrt{\frac{x}{2}}J_{l+1/2}$ für $l = 0, 1, 2, 3$ in rot, grün, blau, schwarz