Proseminar Mathematische Methoden der Physik II — *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 10, 10. Jänner 2011

Inhomogene Dirichletsche Randwertaufgaben

1. Statisch belastete Trommelmembran[1]: Sei $j(t,x) = -1$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^3$. Ansatz: Sei $A \in C^2\left(\mathbb{R}^3 : \mathbb{R}\right)$ so, dass eine Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ existiert, dass $A(t,x) = g\left(|x|\right)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^2 \setminus 0\right)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\Box A = j$ auf $\mathbb{R}^3$ mit der Randbedingung $A(t,x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| = R \in \mathbb{R}_{>0}$ genau dann gilt, wenn $g(r) = \left(r^2 - R^2\right)/4$. Siehe Figur 1

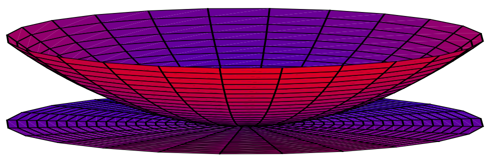

Figure 1: Kreismembran, statisch und gleichförmig belastet

   (b) Welche Lösung A erfüllt die inhomogene Randbedingung $A(t,x) = C\cos\left(l\varphi\left(x\right)\right)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| = R$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$ und ein $C \in \mathbb{R}$? Hinweis: Addieren Sie eine Lösung von $\Box A = 0$, welche die inhomogene Randbedingung erfüllt. Blicken Sie zurück auf Bsp. 1 von Blatt 7. Die Figur 2 zeigt die Lösung für $C = 1/4$ und $l = 4$.

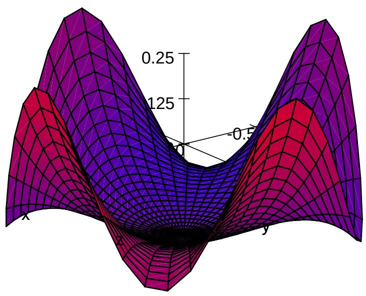

Figure 2: Statisch belastete Membran mit gewellter Randaufhängung

2. *Inhomogenes Dirichletrandwertproblem zur Rechtecksmembran:*

   Sei $R := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L_1 \text{ und } 0 < y < L_2\right\}$. Sei $u : \overline{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $u\,|_R \in \mathcal{C}^2\left(R : \mathbb{R}\right)$. Auf R gelte $\Delta u = 0$ und auf ∂R die Randvorgabe: $u\left(x, L_2\right) = \sin\left(\pi \frac{x}{L_1}\right), u(x,0) = u(0,y) = u(L_1,y) = 0$.

   Zeigen Sie $u(x,y) = \frac{\sin(\pi x/L_1)\sinh(\pi y/L_1)}{\sinh(\pi L_2/L_1)}$ für alle $(x,y) \in \overline{R}$. Können Sie u zu einer harmonischen Funktion auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen? Hat u in R ein Minimum?

[1] Es ist dies ein Beispiel für ein statisches Randwertproblem. Es sagt im Rahmen der Elastomechanik, dass eine statisch und gleichmäßig belastete Kreismembran die Form eines Rotationsparaboloids annimmt. Spannen Sie eine Frischhaltefolie straff über ein mit Wasser halb gefülltes Glas, erhitzen Sie es in der Mikrowelle und warten Sie die Abkühlung ab.

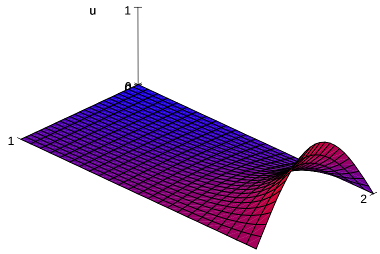

Figure 3: u von Bsp.2 für $L_1 = 1$ und $L_2 = 2$

3. *Inhomogenes Dirichletrandwertproblem zur Rechtecksmembran:*
   Sei $R := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L_1 \text{ und } 0 < y < L_2\right\}$. Sei $u : \overline{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $u\mid_R \in \mathcal{C}^2(R : \mathbb{R})$. Auf R gelte $\Delta u = 0$ und auf ∂R die Randvorgabe: $u(x, L_2) = \frac{x}{L_1}\left(1 - \frac{x}{L_1}\right), u(x,0) = u(0,y) = u(L_1, y) = 0$. Zeigen Sie, dass für $(x,y) \in R$

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{((2k+1)\pi)^3} \frac{\sinh\left((2k+1)\pi\frac{y}{L_1}\right)}{\sinh\left((2k+1)\pi\frac{L_2}{L_1}\right)} \sin\left((2k+1)\pi\frac{x}{L_1}\right).$$

   Können Sie u zu einer harmonischen Funktion auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen? Hinweis: Konvergiert die Reihe für $x = L_1/2$ und $y > L_2$?

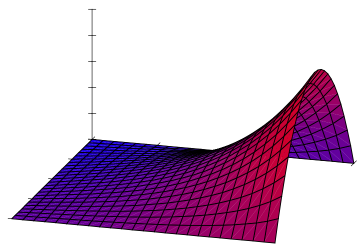

Figure 4: u von Bsp.3

4. *Vollständige Separation von $\Box A = 0$ in Polarkoordinaten:*
   Für $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right) \setminus 0$ gelte für alle (t,x) mit x im Bereich der Polarkoordinaten (r,φ)

$$A(t,x) = f(t)\, h(r(x))\, B(\varphi(x)).$$

   Zeigen Sie, dass aus $\Box A = 0$ folgt, dass Zahlen $m \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren, für die

$$\begin{aligned} f'' + c^2\lambda f &= 0 \text{ auf } \mathbb{R}, \\ B'' + m^2 B &= 0 \text{ auf } (0, 2\pi), \\ h''(r) + \frac{1}{r}h'(r) + \left(\lambda - \frac{m^2}{r^2}\right)h(r) &= 0 \text{ auf } \mathbb{R}_{>0}. \end{aligned}$$