Komplexe Zahlen, Wurzel, Logarithmus und Holomorphie

1. Sei V ein reeller 2d Vektorraum. (e_1, e_2) sei eine Basis von V. Für eine (reell) bilineare Multiplikationsabbildung $\cdot : V \times V \to V$ gelte
$$e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = -e_1.$$
Rechnen Sie nach, dass dann für alle $u, v, w \in V$ gilt:
$$v \cdot w = w \cdot v, \quad u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w, \quad e_1 \cdot u = u.$$
Zeigen Sie, dass für jedes $u \in V \setminus 0$ genau ein $u^{-1} \in V$ existiert, sodass $u \cdot u^{-1} = e_1$. Gilt dies auch dann, wenn die Definition von $\cdot$ zu $e_2 \cdot e_2 = +e_1$ abgeändert wird?

2. Seien $w, z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $|w \cdot z| = |w|\,|z|\,, \quad |1/z| = 1/\,|z|\,.$

3. Geben Sie für die vier Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -1$ die folgenden Größen an: $|z|\,, \Re z, \Im z, \arg(z)\,.$

4. $\arg\left(1 + i\sqrt{3}\right) \;=?, \quad \arg\left(\sqrt{3} - i\right) \;=?$ Berechnen Sie Betrag und Argument von $\sqrt[3]{1 + i\sqrt{3}}$ und von $\sqrt[3]{\sqrt{3} - i}$ für den Hauptzweig der Wurzelfunktion. Geben Sie auch die Hauptzweigwerte von $\ln\left(1 + i\sqrt{3}\right)$ und $\ln\left(\sqrt{3} - i\right)$ an.

5. Kontrollieren Sie für die folgenden Funktionen f, ob die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten.
   (a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$.
   (b) $f : \mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/z$.
   (c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sin(z)\,.$
   (d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$ und festes $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Legen Sie eine Liste der (harmonischen!) Funktionen $\Re f$ und $\Im f$ an, die dieses Beispiel abwirft. Geben Sie auch die Kartenausdrücke dieser Funktionen in Polarkoordinaten an.

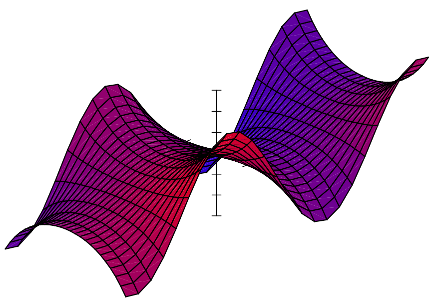

Figure 1: Die harmonische Funktion $\sin(x)\cosh(y)$

6. Geben Sie reelle Funktionen u, v an, sodass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ gilt:
$$u(x, y) + iv(x, y) = \ln(x + iy)\,.$$
Hier bezeichnet ln den Hauptzweig der Logarithmusfunktion. Drücken Sie u und v durch elementare reelle Funktionen aus. Berechnen Sie: $i^i := e^{i \ln i} =?$