9. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 14. Dezember 2009 / GG

$\Box A = 0$ auf $\mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \setminus 0\right)$: Kugelwellen mit Singularität; $\Box A = j$ auf $\mathbb{R}^3$

1. Gegebenenfalls Nachtrag von Blatt 8, Beispiele 4 & 5

2. Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$ und $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}, x \mapsto f(|x|)/|x|$. Zeigen Sie $(\Delta\phi)(x) = f''(|x|)/|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$.

3. Sei $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$ und $A : \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \setminus 0\right) \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto \psi(t,|x|)/|x|$. Zeigen Sie, dass $\Box A = 0$ genau dann auf $\mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \setminus 0\right)$, wenn $\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_r^2\right)\psi = 0$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$. Zu einer lokalen Lösung A existieren also zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$, sodass $A = A_{f,g}$ mit

$$A_{f,g}(t,x) := \frac{1}{|x|}\left[f(|x| - ct) + g(|x| + ct)\right]$$

für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \setminus 0\right)$. Lokale Lösungen $A_{f,0}$ (resp. $A_{0,g}$) heißen auslaufend (resp. einlaufend). Warum? I.a. hat $A_{f,g}$ keine stetige Fortsetzung nach $x = 0$ und ergibt daher keine globale Lösung von $\Box A = 0$. Warum? Die Figur 1 zeigt $x \mapsto A_{f,0}(t,x,0,0)$ mit $f(x) = 1/\left(1+x^2\right)$ für $t \in \{-2,0,2,4,6,8\}$ im Bereich $1 < x < 15$. Ein physikalisches Bild: Am Ort 0 sitzt eine zeitabhängige Punktquelle, die im Fall von $A_{f,0}$ das anfänglich ruhende Medium zu einer Welle anregt. Im Fall von $A_{0,g}$ wird das anfänglich schwingende Medium von der Quelle ruhiggestellt bzw. die einlaufende Welle wird ausgelöscht . Im allgemeinen Fall von $A_{f,g}$ läuft g auf die Quelle zu, wird von dieser gelöscht und durch das auslaufende f ersetzt.

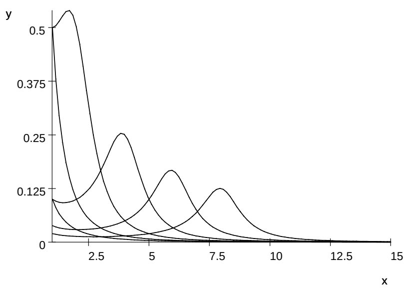

Figure 1: Momentaufnahmen einer auslaufenden Kugelwelle

4. Statisch belastete Trommelmembran[1]: Sei $j(t,x) = -1$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^3$. Ansatz: Sei $A \in C^2\left(\mathbb{R}^3 : \mathbb{R}\right)$ so, dass eine Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ existiert, dass $A(t,x) = g(|x|)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^2 \setminus 0\right)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\Box A = j$ auf $\mathbb{R}^3$ mit der Randbedingung $A(t,x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| = R \in \mathbb{R}_{>0}$ genau dann gilt, wenn $g(r) = \left(r^2 - R^2\right)/4$. Siehe Figur 2

   (b) Welche Lösung A erfüllt die inhomogene Randbedingung $A(t,x) = C\cos(l\varphi(x))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| = R$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$ und ein $C \in \mathbb{R}$? Hinweis: Addieren Sie eine Lösung von $\Box A = 0$, welche die inhomogene Randbedingung erfüllt. Blicken Sie zurück auf Bsp. 1 von Blatt 7. Die Figur 3 zeigt die Lösung für $C = 1/4$ und $l = 4$.

[1] Es ist dies ein Beispiel für ein statisches Randwertproblem. Es sagt im Rahmen der Elastomechanik, dass eine statisch und gleichmäßig belastete Kreismembran die Form eines Rotationsparaboloids annimmt. Spannen Sie eine Frischhaltefolie straff über ein mit Wasser halb gefülltes Glas, erhitzen Sie es in der Mikrowelle und warten Sie die Abkühlung ab.

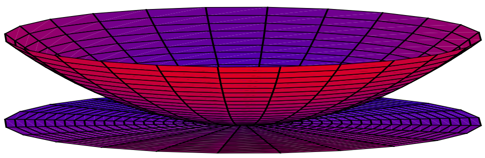

Figure 2: Kreismembran, statisch und gleichförmig belastet

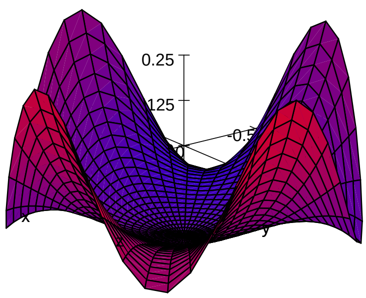

Figure 3: Statisch belastete Membran mit gewellter Randaufhängung