8. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 7. Dezember 2009

---

1. Klausur

1. (4P) Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sei ein Skalarprodukt von V. Ein fester Vektor $k \in V$ sei gewählt. Für $A : \mathbb{R} \times V \to \mathbb{R}$ gelte mit $|k| = \sqrt{\langle k, k\rangle}$

$$A(t,x) = \cos\left(c\,|k|\,t - \langle k, x\rangle\right).$$

Berechnen Sie $grad_x\left(A(t,\cdot)\right)$ und $\Delta_x\left(A(t,\cdot)\right)$ und zeigen Sie damit, dass $\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta_x\right) A = 0$.

2. (4P) Finden Sie mithilfe der Cauchy-Riemanngleichungen heraus, ob die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash 0 \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z/\overline{z}$ holomorph ist.

3. (4P) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \pi + R \cdot e^{it}$ für ein $R \in (0, \pi)$. Skizzieren Sie den Weg der Kurve γ und berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \frac{1}{\sin z} dz.$$

Hinweis: Ist π eine einfache Nullstelle von sin? Welches Residuum hat $1/\sin$ in π?

4. (4P) Sei $l \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^{-l}$ ist holomorph. Welche Kartenausdrucke haben $\Re f$ und $\Im f$ in Polarkoordinaten? Kontrollieren Sie (in Polarkoordinaten!), dass $\Re f$ harmonisch ist.