Spaziergang mit Laplace, Schrödinger und d'Alembert auf $\mathbb{R}^2$

1. Auf dem Kartenbereich $U = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_1$ der Polarkoordinaten (r, φ) gelte $w = r^l \cdot (A \circ \varphi)$ mit $A \in \mathcal{C}^2((0, 2\pi) : \mathbb{R})$ und $l \in \mathbb{N}$.

   (a) Zeigen Sie, dass w genau dann harmonisch ist, wenn $A \circ \varphi = \alpha \cos(l\varphi) + \beta \sin(l\varphi)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Hinweis: $\Delta w = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\right) r^l A(\varphi) = 0$ auf U.

   (b) Sei nun w auf U harmonisch. Zeigen Sie, dass w eine stetige Fortsetzung $\widetilde{w}$ nach $\mathbb{R}^2$ hat. Zeigen Sie, dass $\widetilde{w}$ harmonisch ist. Hinweis: Die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Abbildung $P : z \mapsto z^l$ hat nach Cauchy & Riemann harmonischen Real- und Imaginärteil. Welche Kartenausdrucke haben $P, \Re P$ und $\Im P$ in Polarkoordinaten?

   (c) Geben Sie den kartesischen Kartenausdruck von $\widetilde{w}$ für $w = r^l \cos(l\varphi)$ und $w = r^l \sin(l\varphi)$ für $l = 1, 2, 3$ an und kontrollieren Sie an diesem $\Delta \widetilde{w} = 0$.

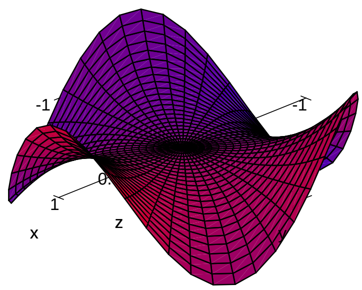

Figure 1: Polarplot von $r^3 \cos(3\varphi)$

2. Eine Funktion $\phi \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{C}\right)$ mit
$$i\partial_t \phi = -\frac{1}{2}\partial_x^2 \phi \tag{1}$$
heißt Lösung der 2-dimensionalen, freien, parameterreduzierten Schrödingergleichung.

   (a) Seien $u = \Re\phi, v = \Im\phi$. Zeigen Sie, dass Gleichung (1) dem reellen System
$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x^2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
äquivalent ist.

   (b) Sei $k \in \mathbb{R}$ fest gewählt und $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit $\phi(t, x) = f(t) \exp(ikx)$. Dabei sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion. Zeigen Sie, dass ϕ genau dann Lösung von (1) ist, wenn ein $A \in \mathbb{C}$ existiert, sodass $f(t) = A \exp\left(-i\frac{k^2}{2}t\right)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $\Re\phi$ und $\Im\phi$ für $A = 1$. (Siehe Figur 2) In welche Richtung verschiebt sich der Graph von $x \mapsto \phi(t, x)$ mit wachsendem t? Welche Phasengeschwindigkeit hat ϕ?

3. Zeigen Sie für $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit $\phi(t, x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2(1+it)}\right)}{\sqrt{1+it}}$ Gleichung (1) und $|\phi(t, x)|^2 = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{1+t^2}\right)}{\sqrt{1+t^2}}$.

4. Seien $c, k \in \mathbb{R}_{>0}$ und $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto f(t) \sin(kx)$ mit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. Sei L_k die Menge aller solchen Funktionen A, für die
$$\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t)^2 - (\partial_x)^2\right) A = 0.$$

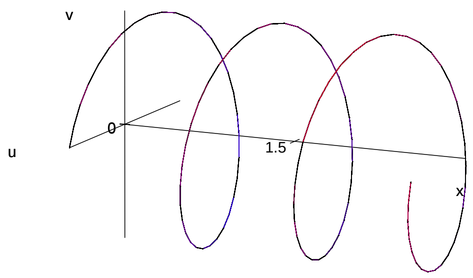

Figure 2: Die Funktion $x \mapsto \phi(0, x)$ für $k = 2\pi$.

(a) Bestimmen Sie L_k. Lösung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$A_{a,b}(t, x) := (a \cos(ckt) + b \sin(ckt)) \sin(kx)$$

für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $L_k = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Figur 3 zeigt $x \mapsto A_{1,0}(t, x)$ für $k = 1 = c$ zu den Zeiten $t \in \left\{0, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}, \pi\right\}$.

(b) Für welche $A \in L_k$ gilt $A(0, x) = \sin(kx)$ und $\partial_t A(0, x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Lösung: $A(t, x) = \cos(ckt) \sin(kx)$.

(c) Für welche $A \in L_k$ gilt $A(0, x) = 0$ und $\partial_t A(0, x) = \frac{1}{\tau} \sin(kx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Hier ist $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$. Lösung: $A(t, x) = \frac{1}{ck\tau} \sin(ckt) \sin(kx)$.

(d) Wie muss f gewählt werden, wenn in der Problemstellung $\sin(kx)$ durch $(kx)^3$ ersetzt wird? Lösung: $f = 0$.

(e) Wie lautet L_k, wenn in der Problemstellung $\sin(kx)$ durch $\exp(kx)$ ersetzt wird? Lösung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $A_{a,b}(t, x) := (a \exp(ckt) + b \exp(-ckt)) \exp(kx)$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $L_k = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

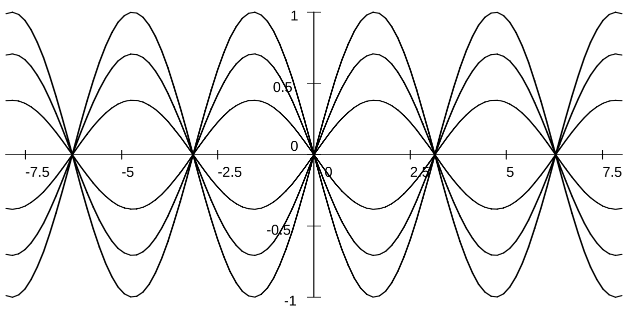

Figure 3: Schnappschüsse einer stehenden Welle

5. Kontrollieren Sie für $A \in L_k$ von Beispiel 4a) oder 4e) die Formel von d'Alembert

$$A(t, x) = \frac{1}{2} \{u(x + ct) + u(x - ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi) d\xi.$$

Diese Formel drückt *jede* $\mathcal{C}^2$-Lösung der Wellengleichung auf $\mathbb{R}^2$ durch ihre Anfangswerte $A(0, x) = u(x)$ und $\partial_t A(0, x) = v(x)$ aus. Es gilt dabei $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ und $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. Geben Sie die Zerlegung von $A \in L_k$ in einen links- und einen rechtsläufigen Anteil an.