6. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 23. November 2009 / GG

Komplexe Wegintegration, Residuensatz und Gauß'sche Integrale

1. Zeigen Sie mithilfe des Residuensatzes, dass für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = Re^{it}$ für ein $R \in (0, \pi)$ gilt
$$\int_\gamma \frac{dz}{\sin z} = 2\pi i.$$
Hinweis: zeigen Sie, dass eine in der Kreisscheibe $|z| < \pi$ holomorphe Funktion g existiert, für die $1/\sin z = g(z)/z$ auf $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \pi\}$ gilt. Überlegen Sie, dass $g(0) = 1$. Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihenentwicklung von g um 0?

2. Seien $x \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie mithilfe des Residuensatzes
$$\lim_{K\to\infty} \int_{-K}^{K} \frac{\exp(ikx)}{k^2 + \lambda^2} dk = \frac{\pi}{\lambda} e^{-\lambda|x|}.$$
Überprüfen Sie damit den Fourierschen Umkehrsatz und die in Math. Meth. I berechnete Fouriertransformierte von $e^{-\lambda|x|}$:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda|x|} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{k^2 + \lambda^2}.$$
Hinweis: Schließen Sie für $x \geq 0$ den Integrationsweg durch einen Halbkreisbogen in der oberen komplexen Halbebene. Den Fall $x < 0$ führen Sie durch die Substitution $k' = -k$ auf $x > 0$ zurück.

3. Für den Evolutionskern $u : (\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der parameterreduzierten, freien, 1d Schrödingergleichung
$$i\partial_t \psi = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \psi \tag{1}$$
gilt
$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i t}} e^{i\frac{x^2}{2t}}.$$
Die Funktion $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit
$$\phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + it}} e^{-\frac{x^2}{2(1+it)}}$$
ist eine Lösung von Gleichung (1). Rechnen Sie für $t \neq 0$ nach, dass
$$\phi(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x - y)\, \phi(0, y)\, dy.$$
Hinweis: nach geeigneter quadratischer Ergänzung ist die Gauß-Formel
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+\beta)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$
anwendbar. Dabei gilt $\beta \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\Re\alpha > 0$. Die Funktion $\sqrt{\cdot}$ bezeichnet den Hauptzweig der (komplexen) Quadratwurzel.