5. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 16. November 2009 / GG

Holomorphie; Potenzreihe von $\ln$ um 1; komplexe Kurvenintegrale

1. Für welche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ existiert eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$(\Re f)(x+iy) = x^2 + 2axy + by^2 \tag{1}$$

gilt? Geben Sie zu jedem solchen Paar (a,b) alle holomorphen Funktionen f an, für die Gleichung (1) gilt.

Hinweis: Was lässt sich aus $\Delta(\Re f) = 0$ über b erschließen? Lösen Sie dann mit diesem Wissen die Cauchy-Riemann Gleichungen.

2. Sei $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $g : K_1 \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots$$

Die unendliche Reihe ist durch die geometrische Reihe, die den Konvergenzradius 1 hat, majorisiert. Daher ist g holomorph. Zeigen Sie mithilfe von Ketten- und Quotientenregel, dass für alle $z \in K_1$

$$\frac{d}{dz}\frac{e^{g(z)}}{1+z} = 0.$$

Schließen Sie daraus, dass $g(z) = \ln(1+z)$, wobei ln der Hauptzweig der Logarithmusfunktion ist. Welche Potenzreihe hat die Funktion ln um $x \in \mathbb{C}$ mit $x = \Re x > 0$?

Bemerkung, siehe etwa O. Forster, Analysis 1, §22: Für $z = 1$ spezialisiert sich die Potentreihe $g(z)$ auf die alternierende harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Diese konvergiert nach dem Leibnizkriterium. Nach dem Abel'schen Grenzwertsatz konvergiert sie (wie naiv zu erwarten ist) gegen $\ln(2)$. Für $z = -1$ hingegen spezialisiert sich die Reihe $-g(z)$ zur harmonischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Diese divergiert. (O. Forster, Analysis 1, § 7)

3. Zeigen Sie für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $|z| < 1$, dass

$$\ln(1+z) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + 2x + x^2 + y^2\right) + i \arctan\frac{y}{1+x}.$$

Überprüfen Sie die Holomorphie von $z \mapsto \ln(1+z)$ im Bereich $|z| < 1$ mit Cauchy-Riemann.

4. Sei $R > 0$ und $\gamma_1 : [-2R, 0] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t + R$. Weiter sei $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto R \cdot \exp(it)$. Die Kurve $\gamma : [-2R, \pi] \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \le 0 \\ \gamma_2(t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

parametrisiert daher einen in der oberen komplexen Halbebene liegenden Halbkreis um 0 (samt Durchmesser). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x+iy) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \frac{2R^3}{3}(2 - \alpha).$$

Beachten: f ist holomorph $\Leftrightarrow \alpha = 2 \Leftrightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = 0$.