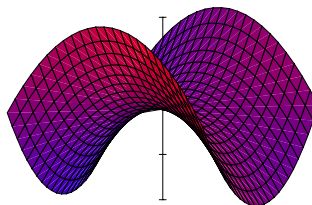


**3. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / Oktober 2009 / GG**  
 (Außer Wertung, da die 2 PS-Termine am 26.10. und 2.11. entfallen)

**Euklidische Vektoranalysis mit krummlinigen Koordinatensystemen: grad, div, rot,  $\Delta$**

1. Seien  $(x, y)$  die Standardkoordinaten von  $\mathbb{R}^2$ . Sei  $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\}$ .
  - (a) Sei  $f = x^2 - y^2$  auf  $\mathbb{R}^2$ . Berechnen Sie  $\text{grad}(f)$  und  $\Delta f$  (bezüglich des Standardskalarproduktes) auf  $U$  unter Benützung von Polarkoordinaten. Kontrollieren Sie ihre Ergebnisse durch eine zweite Berechnung von  $\text{grad}(f)$  und  $\Delta f$  unter Benützung von Standardkoordinaten.
  - (b) Sei  $f = x/(x^2 + y^2)$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ . Berechnen Sie  $\text{grad}(f)$  und  $\Delta f$  (bezüglich des Standardskalarproduktes) auf  $U$  unter Benützung von Polarkoordinaten. Kontrollieren Sie ihre Ergebnisse durch eine zweite Berechnung von  $\text{grad}(f)$  und  $\Delta f$  unter Benützung von Standardkoordinaten.

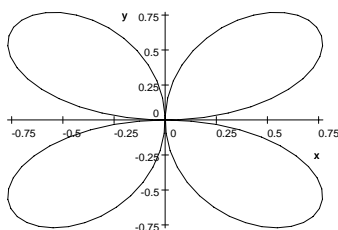


Die Funktion  $x^2 - y^2$

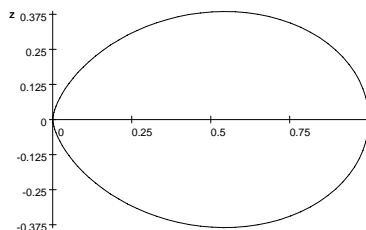
2. Für das Skalarfeld  $f : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$  gelte in der Standardkarte  $(x, y, z)$  von  $\mathbb{R}^3$  mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$f = \frac{2xy}{r^5}.$$

( $f$  ist ein Quadrupolpotential.) Auf dem Definitionsbereich  $U$  der Kugelkoordinaten  $\Phi = (r, \theta, \phi)$  gilt daher  $f = \frac{1}{r^3} \sin^2(\theta) \sin(2\phi)$ .



Polardiagramm von  $\sin(2\phi)$



Polardiagramm von  $\sin^2 \theta$

- (a) Berechnen Sie auf  $U$  bezüglich des Standardskalarproduktes die Komponenten von  $\text{grad}(f)$  zur Kartenbasis von  $\Phi$ .
  - (b) Leiten Sie aus dem Ergebnis von a) ab, dass  $\Delta f = 0$  auf  $U$ .
  - (c) Zeigen Sie  $\Delta f = 0$  auf  $\mathbb{R}^3 \setminus 0$  unter Verwendung der Standardkarte.
3. Seien  $(r, \phi, z)$  Zylinderkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$  und sei  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Auf dem Kartenbereich  $U$  von  $(r, \phi, z)$  gelte  $X = \frac{f(r)}{r^2} \delta_\phi$ . Zeigen Sie (unter Verwendung der Formel für die Rotation in einem krummlinigen Koordinatensystem), dass  $\text{rot}(X) = \frac{f'(r)}{r} (0, 0, 1)$  auf  $U$ .