2. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 19. Oktober 2009 / GG

Krummlinige Koordinaten in einem Vektorraum

1. Nachtrag von Blatt 1, Beispiel 4.
2. Zeigen Sie, dass Hamilton'sche Vektorfelder divergenzfrei sind. (Ihre Flussabbildungen sind daher volumserhaltend.) Siehe Math Meth I, SoSe 09, PS Blatt 8, Bsp. 1.
3. Sei $\Psi = (x, y)$ die Standardkarte von $\mathbb{R}^2$ und sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\right\}$ (geschlitzte Ebene). Sei $\Phi = (\rho, \phi)$ die Karte der Polarkoordinaten auf U.
   (a) Skizzieren sie einige Niveaulinien $\rho = const$ bzw. $\phi = const$.
   (b) Zerlegen Sie die Kartenbasis in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \phi_0)$ nach der Standardbasis.
   (c) Zeigen Sie, dass die Funktionalmatrix $\left(\partial_j^\Phi \Psi^i\right)$ überall maximalen Rang hat.
   (d) Berechnen Sie die Gram'sche Matrix[1] $G^\Phi(p)$ in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \phi_0)$.
   (e) Sei $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$. Zeigen Sie, dass auf U gilt
   $$\Delta f = \left(\delta_1^\Phi\right)^2 [f] + \frac{1}{\rho}\delta_1^\Phi [f] + \frac{1}{\rho^2}\left(\delta_2^\Phi\right)^2 [f].$$
   Die Kurznotation für diesen Kartenausdruck des Laplaceoperators in Polarkoordinaten ist
   $$\Delta = \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2.$$
   Hinweis: $\Delta f = \left(\delta_1^\psi\right)^2 [f] + \left(\delta_2^\psi\right)^2 [f]$. Drücken Sie die iterierte Richtungsableitung $\left(\delta_i^\psi\right)^2 [f]$ durch (iterierte) Richtungsableitungen nach δ_1^Φ und δ_2^Φ aus.
4. (Außer Wertung) Sei $\Psi = (x, y)$ die Standardkarte von $\mathbb{R}^2$ und sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\right\}$ (geschlitzte Ebene). Für die „parabolische" Karte $\Phi = (u, v)$ gilt auf U
   $$x = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right), \quad y = uv \text{ mit } v > 0.$$
   (a) Skizzieren sie einige Niveaulinien $u = const$ bzw. $v = const$.
   (b) Zerlegen Sie die Kartenbasis in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (u_0, v_0)$ nach der Standardbasis.
   (c) Zeigen Sie, dass die Funktionalmatrix $\left(\partial_j^\Phi \Psi^i\right)$ überall maximalen Rang hat.
   (d) Berechnen Sie die Gram'sche Matrix $G^\Phi(p)$ in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (u_0, v_0)$.

[1] Zum Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^2$.