13. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 1. Feb 2010 / GG

Klausurtrainingsblatt

1. *Freie Schrödingergleichung auf Halbachse:* Seien $f \in C^1(\mathbb{R} : \mathbb{C})$ und $g \in C^2(\mathbb{R}_{>0} : \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ mit $\psi(t,x) = f(t)\,g(x)$ genau dann *beschränkt* ist und die Schrödingergleichung
$$i\partial_t \psi(t,x) = -\partial_x^2 \psi(t,x) \text{ auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$$
mit der Randbedingung $\lim_{x\to 0} \psi(t,x) = 0$ erfüllt, wenn zwei Zahlen $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $C \in \mathbb{C}$ existieren, sodass für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$
$$\psi(t,x) = Ce^{-ik^2 t} \sin kx.$$
Für $k \geq 0$ ist somit die Funktion $u_k : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ mit $u_k(x) = \sin(kx)$ eine Eigenmode zur Eigenfrequenz k^2.

2. *Separation der Schrödingergleichung mit Coulombpotential:* Sei $\psi \in C^2\left(\mathbb{R}^3 \setminus 0 : \mathbb{C}\right)$ mit $\psi = f(r)\,Y(\theta,\varphi)$ auf dem Kartenbereich U der Kugelkoordinaten. Zeigen Sie (unter Verwendung der Vorlesung!), dass auf $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ die stationäre Schrödingergleichung
$$-\left(\Delta + \frac{q}{r}\right)\psi = \varepsilon\psi$$
mit Konstanten $q, \varepsilon \in \mathbb{R}$ genau dann gilt, wenn eine Zahl $l \in \mathbb{N}_0$ existiert, für die
$$\begin{aligned} f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{q}{r} - \varepsilon\right) f(r) &= 0, \\ \Delta_{\mathbb{S}^2} Y(\theta,\varphi) + l(l+1)\,Y(\theta,\varphi) &= 0. \end{aligned}$$
Zeigen Sie, dass mit $f(r) = h(r)/r$ die Radialgleichung zu
$$h''(r) - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{q}{r} - \varepsilon\right) h(r) = 0$$
äquivalent ist.

3. *Eigenmoden von $\Box A = 0$ mit periodischer Randbedingung:* Bestimmen Sie Frequenzspektrum und Eigenmoden einer schwingenden Saite der Länge L mit periodischen Randbedingungen. Bestimmen Sie also *beschränkte* C^2-Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : [0,L] \to \mathbb{R}$ so, dass $A(t,x) = f(t)\,g(x)$ auf $\mathbb{R} \times (0,L)$ die dAWG $\Box A = 0$ erfüllt. Weiters gelte $A(t,0) = A(t,L)$ und $\lim_{x\to 0} \partial_x A(t,x) = \lim_{x\to L} \partial_x A(t,x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. (Eine physikalische Realisierung: schwingende Luftsäule in einem langen dünnen Torus)

   Lösung: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [0,L]$ sei $u_n(x) = \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)$ und $v_n(x) = \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)$. Dann gilt: A ist eine beschränkte Lösung der dAWG mit periodischen Randbedingungen mit $A(t,x) = f(t)\,g(x)$ genau dann, wenn ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $\delta, a, b \in \mathbb{R}$ existieren, sodass mit $\omega_n = c2\pi n/L$
$$A(t,x) = \cos(\omega_n t - \delta)\left[a u_n(x) + b v_n(x)\right].$$
   Zu jeder Eigenfrequenz $\omega_n > 0$ existiert ein zweidimensionaler reeller Vektorraum von Eigenmoden. Eine Basis bilden u_n und v_n. Zur Eigenfrequenz 0 existiert nur der eindimensionale Raum von konstanten Eigenmoden $\mathbb{R} \cdot u_0 \simeq \mathbb{R}$. Das Spektrum der Eigenfrequenzen ist $c\frac{2\pi}{L}\mathbb{N}_0$.