1. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 12. Oktober 2009 / GG

Kurvenintegrale von Vektorfeldern; Divergenz, Laplace - Δ und Rotation

1. Sei (x,y) die Standardkarte von $V = \mathbb{R}^2$. Für $L : V \to V$ gelte $L = (-y, x)$ (Drehvektorfeld). Es soll nun mit verschiedenen Methoden gezeigt werden, dass L kein Potential hat, d.h., dass *keine* Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $L = grad\,(f)$.

   (a) Direkte Methode: Zeigen Sie, dass die beiden Differentialgleichungen (bezüglich der Standardbasis) $-y = \partial_1 f$ und $x = \partial_2 f$ keine Lösung f haben.

   (b) Indirekt: Zeigen Sie, dass L nicht rotationsfrei ist.

   (c) Sei $\gamma_1 : [-R, R] \to V$ mit $\gamma_1(t) = (t, 0)$. Zeigen Sie $\int_{\gamma_1} L = 0$. Sei $\gamma_2 : [0, \pi] \to V$ mit $\gamma_2(t) = (R\cos t, R\sin t)$. Zeigen Sie $\int_{\gamma_2} L = R^2\pi$. Warum folgt daraus, dass L kein Potential hat?

   (d) Sei γ eine Kurve in V, deren Bildmenge der Rand eines achsenparallelen Quadrats mit der Seitenlänge 2ε und mit dem Mittelpunkt $(a,b) \in V$ ist. Die Kurve durchlaufe den Rand im Gegenuhrzeigersinn einmal. Zeigen Sie, dass $\int_\gamma L = 8\varepsilon^2 =$ Doppelte Fläche des Quadrats. Das Integral ist also unabhängig von (a,b).
   Hinweis: Die untere Seite des Quadrats kann folgendermaßen durchlaufen werden
   $$\gamma_1 : [-\varepsilon, \varepsilon] \to V \text{ mit } \gamma_1(t) = (a + t, b - \varepsilon).$$
   Wählen Sie für die drei weiteren Seiten analoge Kurven.

   (e) Sei nun $X = \frac{1}{x^2+y^2} L$ auf $V \setminus 0$. Sei γ wie oben eine Kurve, die den Rand eines (beliebigen) Quadrats im Gegenuhrzeigersinn einmal durchläuft. Zeigen Sie
   $$\int_\gamma X = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } (0,0) \text{ innerhalb des Quadrats liegt} \\ 0 & \text{falls } (0,0) \text{ außerhalb des Quadrats liegt} \end{cases}.$$
   Falls γ durch $(0,0)$ führt, ist $\int_\gamma X$ nicht definiert. Hinweis: Auf der geschlitzten Ebene gilt $X = grad\,(\phi)$.

2. Sei (x,y) die Standardkarte von $V = \mathbb{R}^2$. Für $L : V \to V$ gelte $L = (-y, x)$ (Drehvektorfeld). Sei $X = \frac{1}{x^2+y^2} L$ auf $V \setminus 0$. Zeigen Sie $div\,(X) = 0$. Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $Y = f\left(x^2 + y^2\right) L$. Zeigen Sie $div\,(Y) = 0$.

3. V sei ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichne ein Skalarprodukt von V und $r := \|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Berechnen Sie Δf über $\Delta f = div\,(grad\,(f))$ für die folgenden Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset V$ offen.[1]

   (a) Für ein $k \in V$ sei $f(v) := \sin\langle k, v\rangle$ für alle $v \in V$.

   (b) $f := -\frac{1}{r}$ auf $U = V \backslash 0$. Skizzieren Sie $grad(f)$ für $n = 2$.

   (c) Sei $e \in V$ mit $\|e\| = 1$ und $f(v) = \frac{1}{r(v)}\langle e, v\rangle$ für alle $v \in U = V\backslash 0$. [2]

4. Sei $e \in V = \mathbb{R}^3$ mit $\|e\| = 1$ und $C \in \mathbb{R}$. Es gelte[3] auf $U = V \backslash (\mathbb{R} \cdot e)$ für das Vektorfeld B
   $$B(p) = C\frac{e \times p}{\|e \times p\|^2}.$$
   B hat die Symmetrien: $B(p + \lambda e) = B(p)$ und $B(R(p)) = R(B(p))$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und R Drehung um e. Beachte: $\|e \times p\|$ ist der Abstand von p zur Achse $\mathbb{R} \cdot e$.

   (a) Zeigen Sie $div(B) = 0$ und $rot(B) = 0$ auf U.

[1] Arbeiten Sie dabei entweder ohne Benützung einer Basis, also koordinatenfrei, oder mithilfe der Koordinaten des Vektorraumes zu einer ONB $\underline{e}$. Benützen Sie die Faulenzerregeln.

[2] $f(p)$ ist also der Kosinus des Winkels zwischen e und p. Fig. 1 zeigt das Vektorfeld $\left(-xy, x^2\right)$.

[3] B ist für $C = \mu_0 \frac{I}{2\pi}$ das Magnetfeld eines auf $\mathbb{R} \cdot e$ in Richtung e fließenden Stromes der Stärke I.

(b) Berechnen Sie mit dem Ansatz $A(p) = f(\|e \times p\|) \cdot e$ (auf U) ein Vektorpotential zu B. Finden Sie also eine Lösung A von $B = rot(A)$. Gibt es mehrere Lösungen? [4]

(c) Ist B konservativ?

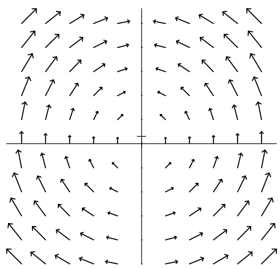

Fig.1

[4] Eine Lösung ergibt sich mit $f(x) = -C \ln(x)$.