8. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 24. Nov. 2008 / GG

Die Wellengleichungen von Schrödinger und d'Alembert auf $\mathbb{R}^2$

1. Eine Funktion $\phi \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{C}\right)$ mit
$$i\partial_t \phi = -\frac{1}{2}\partial_x^2 \phi \tag{1}$$
heißt Lösung der 2-dimensionalen, freien, parameterreduzierten Schrödingergleichung.

   (a) Seien $u = \Re\phi, v = \Im\phi$. Zeigen Sie, dass Gleichung (1) dem reellen System
$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x^2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
äquivalent ist.

   (b) Sei $k \in \mathbb{R}$ fest gewählt und $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit $\phi(t,x) = f(t)\exp(ikx)$. Dabei sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion. Zeigen Sie, dass für ϕ genau dann Gleichung (1) gilt, wenn ein $A \in \mathbb{C}$ existiert, sodass $f(t) = A\exp\left(-i\frac{k^2}{2}t\right)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $\Re\phi$ und $\Im\phi$ für $A = 1$. (Siehe Figur 1) In welche Richtung verschiebt sich der Graph von $x \mapsto \phi(t,x)$ mit wachsendem t? Welche Phasengeschwindigkeit hat ϕ?

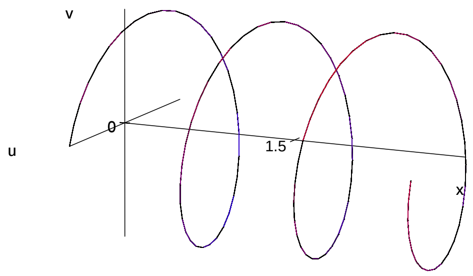

Figure 1: Die Funktion $x \mapsto \phi(0,x)$ für $k = 2\pi$.

2. Zeigen Sie für die Funktion $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit $\phi(t,x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2(1+it)}\right)}{\sqrt{1+it}}$ Gleichung (1). Zeigen Sie, dass $|\phi(t,x)|^2 = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{1+t^2}\right)}{\sqrt{1+t^2}}$.

3. Seien $c, k \in \mathbb{R}_{>0}$ und $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto f(t)\sin(kx)$ mit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. Sei L_k die Menge aller solchen Funktionen A, für die
$$\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t)^2 - (\partial_x)^2\right) A = 0.$$

   (a) Bestimmen Sie L_k. Lösung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$A_{a,b}(t,x) := (a\cos(ckt) + b\sin(ckt))\sin(kx)$$
für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $L_k = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Figur 2 zeigt $x \mapsto A_{1,0}(t,x)$ für $k = 1 = c$ zu den Zeiten $t \in \left\{0, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}, \pi\right\}$.

   (b) Für welche $A \in L_k$ gilt $A(0,x) = \sin(kx)$ und $\partial_t A(0,x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Lösung: $A(t,x) = \cos(ckt)\sin(kx)$.

   (c) Für welche $A \in L_k$ gilt $A(0,x) = 0$ und $\partial_t A(0,x) = \frac{1}{\tau}\sin(kx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Hier ist $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$. Lösung: $A(t,x) = \frac{1}{ck\tau}\sin(ckt)\sin(kx)$.

(d) Wie muss f gewählt werden, wenn in der Problemstellung $\sin(kx)$ durch $(kx)^3$ ersetzt wird? Lösung: $f = 0$.

(e) Wie lautet L_k, wenn in der Problemstellung $\sin(kx)$ durch $\exp(kx)$ ersetzt wird? Lösung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $A_{a,b}(t,x) := (a \exp(ckt) + b \exp(-ckt)) \exp(kx)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $L_k = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

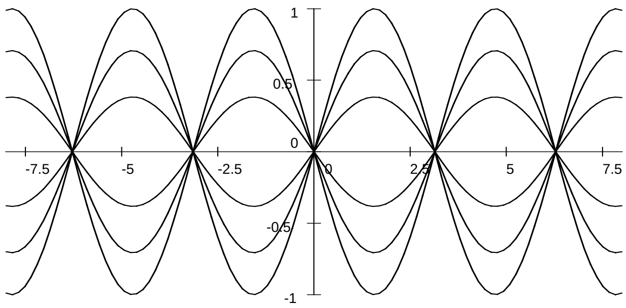

Figure 2: Schnappschüsse einer stehenden Welle

4. Kontrollieren Sie für $A \in L_k$ von Beispiel 3a) oder 3e) die Formel von d'Alembert

$$A(t,x) = \frac{1}{2}\{u(x+ct) + u(x-ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi)d\xi.$$

Diese Formel drückt *jede* $\mathcal{C}^2$-Lösung der Wellengleichung auf $\mathbb{R}^2$ durch ihre Anfangswerte $A(0,x) = u(x)$ und $\partial_t A(0,x) = v(x)$ aus. Es gilt dabei $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ und $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. Geben Sie die Zerlegung von $A \in L_k$ in einen links- und einen rechtsläufigen Anteil an.