7. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 17. November 2008 / GG

Komplexe Wegintegration, Residuensatz und Gauß'sche Integrale

1. Sei $R > 0$ und $\gamma_1 : [-2R, 0] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t + R$. Weiter sei $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto R \cdot \exp(it)$. Die Kurve $\gamma : [-2R, \pi] \to \mathbb{C}$ mit
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \leq 0 \\ \gamma_2(t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$
parametrisiert daher einen in der oberen komplexen Halbebene liegenden Halbkreis um 0 (samt Durchmesser). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie
$$\int_\gamma f(z)\, dz = \frac{2R^3}{3}(2 - \alpha).$$
Beachten: f ist holomorph $\Leftrightarrow \alpha = 2 \Leftrightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

2. Integrieren Sie die Funktion $z \mapsto e^z$ entlang des Umfangs des achsenparallen Quadrats der Kantenlänge 1, dessen Mittelpunkt die Zahl $(1 + i)/2$ ist. Geben Sie die Beiträge der einzelnen Kanten an. Ergibt die Summe 0?

3. Seien $x \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie mithilfe des Residuensatzes
$$\lim_{K \to \infty} \int_{-K}^{K} \frac{\exp(ikx)}{k^2 + \lambda^2} dk = \frac{\pi}{\lambda} e^{-\lambda|x|}.$$
Überprüfen Sie damit den Fourierschen Umkehrsatz und die in Math. Meth. I berechnete Fouriertransformierte von $e^{-\lambda|x|}$:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda|x|} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{k^2 + \lambda^2}.$$
Hinweis: Schließen Sie für $x \geq 0$ den Integrationsweg durch einen Halbkreisbogen in der oberen komplexen Halbebene. Den Fall $x < 0$ führen Sie durch die Substitution $k' = -k$ auf $x > 0$ zurück.

4. (Außer Wertung) Für den Evolutionskern $u : (\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der parameterreduzierten, freien, 1d Schrödingergleichung
$$i\partial_t \psi = -\frac{1}{2}\partial_x^2 \psi \tag{1}$$
gilt
$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i t}} e^{i\frac{x^2}{2t}}.$$
Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ die Lösung von Gleichung (1) mit
$$\phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + it}} e^{-\frac{x^2}{2(1+it)}}$$
Rechnen Sie für $t \neq 0$ nach, dass
$$\phi(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x - y)\, \phi(0, y)\, dy.$$
Hinweis: nach geeigneter quadratischer Ergänzung ist die Gauß-Formel
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+\beta)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$
anwendbar. Dabei gilt $\beta \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C} \setminus 0$ mit $\Re\alpha \geq 0$. Die Funktion $\sqrt{\cdot}$ bezeichnet den Hauptzweig der (komplexen) Quadratwurzel.