3. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 20. Oktober 2008 / GG

Krummlinige Koordinaten in einem Vektorraum

1. Nachtrag von Blatt 2, Beispiel 4.
2. Sei $\Psi = (x, y)$ die Standardkarte von $\mathbb{R}^2$ und sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\right\}$ (geschlitzte Ebene). Sei $\Phi = (\rho, \phi)$ die Karte der Polarkoordinaten auf U.
   (a) Skizzieren sie einige Niveaulinien $\rho = const$ bzw. $\phi = const$.
   (b) Zerlegen Sie die Kartenbasis in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \phi_0)$ nach der Standardbasis.
   (c) Zeigen Sie, dass die Funktionalmatrix $\left(\partial_j^\Phi \Psi^i\right)$ überall maximalen Rang hat.
   (d) Berechnen Sie die Gram'sche Matrix[1] $G^\Phi(p)$ in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \phi_0)$.
   (e) Sei $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$. Zeigen Sie, dass auf U gilt
   $$\Delta f = \left(\delta_1^\Phi\right)^2 [f] + \frac{1}{\rho}\delta_1^\Phi [f] + \frac{1}{\rho^2}\left(\delta_2^\Phi\right)^2 [f].$$
   Die Kurznotation für diesen Kartenausdruck des Laplaceoperators in Polarkoordinaten ist
   $$\Delta = \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2.$$
   Hinweis: $\Delta f = \left(\delta_1^\psi\right)^2 [f] + \left(\delta_2^\psi\right)^2 [f]$. Drücken Sie die iterierte Richtungsableitung $\left(\delta_i^\psi\right)^2 [f]$ durch (iterierte) Richtungsableitungen nach δ_1^Φ und δ_2^Φ aus.
3. (Außer Wertung) Sei $\Psi = (x, y)$ die Standardkarte von $\mathbb{R}^2$ und sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\right\}$ (geschlitzte Ebene). Für die „parabolische" Karte $\Phi = (u, v)$ gilt auf U
   $$x = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right), \quad y = uv \text{ mit } v > 0.$$
   (a) Skizzieren sie einige Niveaulinien $u = const$ bzw. $v = const$.
   (b) Zerlegen Sie die Kartenbasis in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (u_0, v_0)$ nach der Standardbasis.
   (c) Zeigen Sie, dass die Funktionalmatrix $\left(\partial_j^\Phi \Psi^i\right)$ überall maximalen Rang hat.
   (d) Berechnen Sie die Gram'sche Matrix $G^\Phi(p)$ in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (u_0, v_0)$.

---

[1] Zum Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^2$.