13. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 26. Jänner 2009 / GG

Besselfunktionen

1. Sei $\nu^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$ gelte auf $\mathbb{R}_{>0}$ die Besselsche Differentialgleichung
$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y(x) = 0.$$
Zeigen Sie, dass für $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = \sqrt{x} y(x)$ für alle $x > 0$
$$u''(x) + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right) u(x) = 0.$$
Für große x nähert sich $\sqrt{x} y(x)$ daher einer Linearkombination von sin und cos.

2. Ermitteln Sie maschinell für $l = 0, 1, 2$ die drei kleinsten Nullstellen der Besselfunktion $J_{l+1/2}$.

3. Zeigen Sie, dass in der kleinsten Nullstelle von $J_{l+1/2}$ die Ableitung von $J_{l+1/2}$ negativ ist. $J_{l+1/2}$ wechselt dort also von positiven Werten zu negativen. Machen Sie sich damit plausibel, dass die kleinste Nullstelle von $J_{l+1/2}$ monoton steigend in l ist.

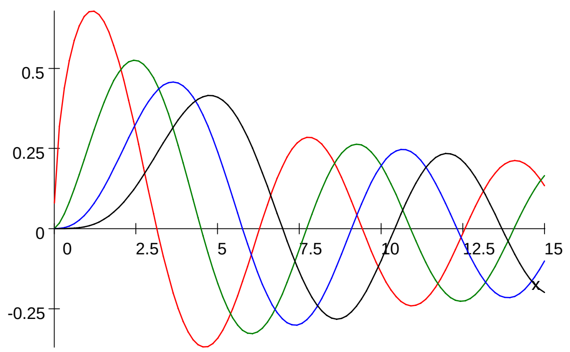

Figure 1: Die Besselfunktionen $J_{l+1/2}$ für $l = 0, 1, 2, 3$ in rot, grün, blau, schwarz

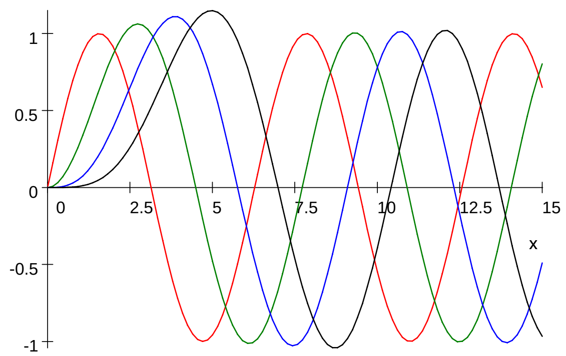

Figure 2: Die Funktionen $\sqrt{\frac{x\pi}{2}} J_{l+1/2}$ für $l = 0, 1, 2, 3$ in rot, grün, blau, schwarz