11. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 12. Jänner 2009 / GG

$\Delta_2 u = 0$ mit inhomogener Dirichlet-Randvorgabe; Separation in Polarkoordinaten

1. Sei $R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L_1 \text{ und } 0 < y < L_2\}$. Sei $u : \overline{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $u\mid_R \in \mathcal{C}^2(R:\mathbb{R})$. Auf R gelte $\Delta u = 0$ und auf ∂R die Randvorgabe: $u(x,L_2) = \sin\left(\pi \frac{x}{L_1}\right), u(x,0) = u(0,y) = u(L_1,y) = 0$.
   (a) Zeigen Sie $u(x,y) = \frac{\sin(\pi x/L_1)\sinh(\pi y/L_1)}{\sinh(\pi L_2/L_1)}$ für alle $(x,y) \in \overline{R}$. Können Sie u zu einer harmonischen Funktion auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen? Hat u in R ein Minimum?
   (b) Sei n das nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektorfeld von ∂R. Zeigen Sie[1] $\int_{\partial R} n[u] = 0$.
   (c) Zeigen Sie für die Energie ε von u

$$\varepsilon := \frac{1}{2}\int_0^{L_1}\left(\int_0^{L_2}\left|grad_{(x,y)}(u)\right|^2 dy\right)dx = \frac{\pi}{4\tanh\left(\pi\frac{L_2}{L_1}\right)}.$$

2. Sei $R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L_1 \text{ und } 0 < y < L_2\}$. Sei $u : \overline{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $u\mid_R \in \mathcal{C}^2(R:\mathbb{R})$. Auf R gelte $\Delta u = 0$ und auf ∂R die Randvorgabe: $u(x,L_2) = \frac{x}{L_1}\left(1-\frac{x}{L_1}\right), u(x,0) = u(0,y) = u(L_1,y) = 0$. Zeigen Sie, dass für $(x,y) \in R$

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{((2k+1)\pi)^3}\frac{\sinh\left((2k+1)\pi\frac{y}{L_1}\right)}{\sinh\left((2k+1)\pi\frac{L_2}{L_1}\right)}\sin\left((2k+1)\pi\frac{x}{L_1}\right).$$

   Können Sie u zu einer harmonischen Funktion auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen? Hinweis: Konvergiert die Reihe für $x = L_1/2$ und $y > L_2$?

3. Für eine Funktion $A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2:\mathbb{R}) \setminus 0$ gelte für alle (t,x), für die x im Definitionsbereich der Polarkoordinaten (r,φ) von $\mathbb{R}^2$ liegt,

$$A(t,x) = f(t)\,h(r(x))\,B(\varphi(x)).$$

   Zeigen Sie, dass aus $\Box A = 0$ folgt, dass Zahlen $m \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren, für die

$$\begin{aligned} f'' + c^2\lambda f &= 0 \text{ auf } \mathbb{R}, \\ B'' + m^2 B &= 0 \text{ auf } (0,2\pi), \\ h''(r) + \frac{1}{r}h'(r) + \left(\lambda - \frac{m^2}{r^2}\right)h(r) &= 0 \text{ auf } \mathbb{R}_{>0}. \end{aligned}$$

4. (Außer Wertung) Geben Sie die harmonische Funktion u auf dem Rechteck R von Bsp. 1) zur folgenden Randvorgabe an.

$$u(x,0) = \sin\left(2\pi\frac{x}{L_1}\right), u(x,L_2) = \alpha\sin\left(\pi\frac{x}{L_1}\right), u(0,y) = u(L_1,y) = 0.$$

   Hinweis: Nutzen Sie die Spiegelungs- und Translationsinvarianz von Δ aus. Lösung:

$$u(x,y) = \sin(2\pi x/L_1)\frac{\sinh(2\pi(L_2-y)/L_1)}{\sinh(2\pi L_2/L_1)} + \alpha\sin(\pi x/L_1)\frac{\sinh(\pi y/L_1)}{\sinh(\pi L_2/L_1)}.$$

---

[1] Ausführlicher notiert ist zu zeigen, dass

$$\int_0^{L_1}\partial_y u(x,L_2)\,dx - \int_0^{L_1}\partial_y u(x,0)\,dx + \int_0^{L_2}\partial_x u(L_1,y)\,dy - \int_0^{L_2}\partial_x u(0,y)\,dy = 0.$$

In der Elektrostatik drückt das die Tatsache aus, dass die Gesamtladung des Randes 0 ist.

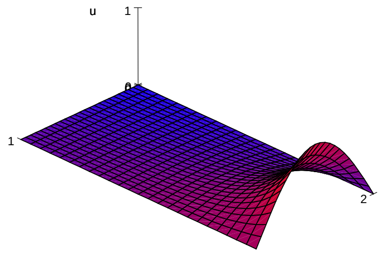

Figure 1: u von Bsp.1 für $L_1 = 1$ und $L_2 = 2$

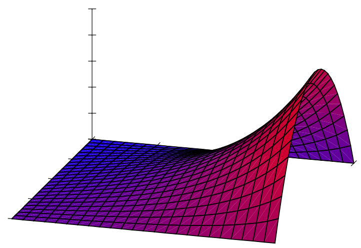

Figure 2: u von Bsp.2

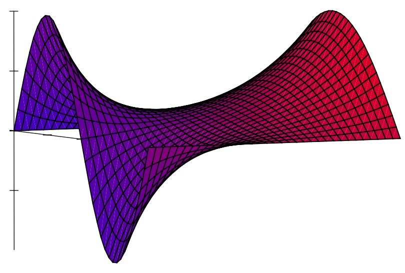

Figure 3: u von Bsp.4