10. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 8. Dez. 2008 / GG

Kirchhoffs Formel, Anfangs-Randwertprobleme zu $\Box A = 0$:

1. (Explosionslösung) Seien $a, R, c \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $v(x) = ac/R$ für $|x| \leq R$ und $v(x) = 0$ für $|x| > R$. Weiter sei $u = 0$. Verwendet man diese Anfangsvorgabe in Kirchhoffs Lösungsformel ergibt sich eine (unstetige) Funktion $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.[1]

   (a) Zeigen Sie mit $\xi = |x|/R$ und $\tau = ct/R$ für $\xi > 1$ und $\tau \geq 0$

   $$A(t,x) = \begin{cases} \frac{a}{4\xi}\left(1 - (\xi - \tau)^2\right) & \text{für } \xi - 1 < \tau < \xi + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

   Hinweis: Wenn die Mittelpunkte zweier Kugeln mit den Radien r_1 und r_2 den Abstand $D < r_1 + r_2$ haben, dann ist die Schnittmenge aus der Oberfläche der Kugel mit dem Radius r_2 und dem Inneren der Kugel mit dem Radis r_1 nicht leer. Zeigen Sie für den Flächeninhalt F dieser Schnittmenge

   $$F = \pi \frac{r_2}{D}\left(r_1^2 - (D - r_2)^2\right).$$

   (b) (Außer Wertung) Zeigen Sie für $0 \leq \xi \leq 1$ und $\tau \geq 0$

   $$A(t,x) = \begin{cases} a\tau & \text{für } 0 \leq \tau \leq 1 - \xi \\ \frac{a}{4\xi}\left(1 - (\xi - \tau)^2\right) & \text{für } 1 - \xi \leq \tau \leq 1 + \xi \\ 0 & \text{für } 1 + \xi < \tau \end{cases} .$$

   (c) (Außer Wertung) Bestimmen Sie Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die auf $\mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \setminus 0\right)$

   $$A(t,x) = \frac{1}{|x|}\left(f(|x| - ct) + g(|x| + ct)\right)$$

   gilt. (Vergleiche Bsp. 3, Blatt 9) Hinweis: Aus Kirchhoffs Formel für $u = 0$ liest man ab, dass $A(-t,x) = -A(t,x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

2. *Die eingespannte Saite:* Bestimmen Sie eine Funktion $A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times (0,L) : \mathbb{R})$ mit $\Box A = 0$ und

   (a) $lim_{x\downarrow 0} A(t,x) = lim_{x\uparrow L} A(t,x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (homogene Dirichlet'sche Randbedingung),

   (b) $A(0,x) = u(x) := aL\sin\left(\pi\frac{x}{L}\right)$ und $\partial_t A(0,x) = v(x) := 2\pi bc\sin\left(2\pi\frac{x}{L}\right)$ für alle $x \in (0,L)$. Es gelte $a, b \in \mathbb{R}$. (Anfangsbedingung).

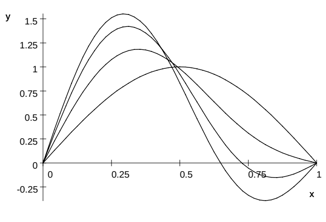
   Beachten Sie, dass $lim_{x\downarrow 0} v(x) = lim_{x\uparrow L} v(x) = 0$ und $\lim_{x\downarrow 0} u''(x) = lim_{x\uparrow L} u''(x) = 0$. Warum ist das von Bedeutung?

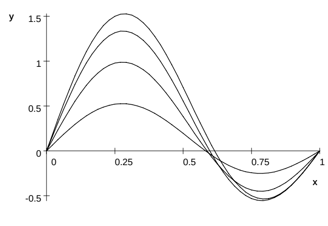
   Lösung:

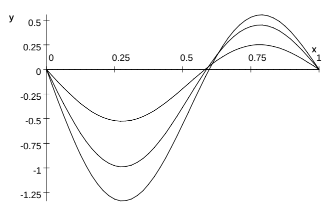
   $$A(t,x) = L\left\{a\cos\left(\pi\frac{ct}{L}\right)\sin\left(\pi\frac{x}{L}\right) + b\sin\left(2\pi\frac{ct}{L}\right)\sin\left(2\pi\frac{x}{L}\right)\right\}.$$

   Gibt es weitere Lösungen A? Ist für festes x die Abbildung $t \mapsto A(t,x)$ periodisch? Falls ja, hängt die (kleinste) Periode von x ab?

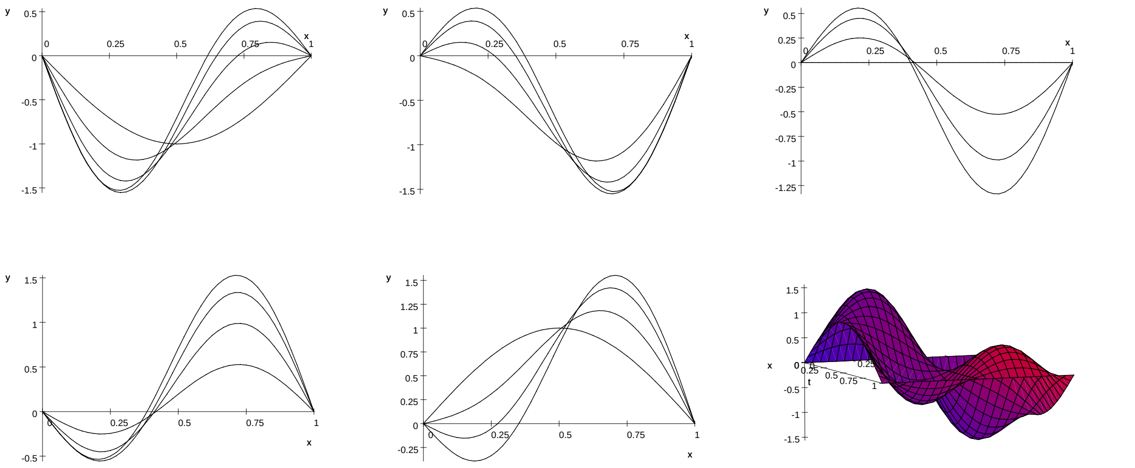
   Hier sind der 3d-Graph und einige Momentaufnahmen der Schwingung A/L für $ct/L = n/16$ für $n = 0, 1, 2, \ldots 32$ und für $a = b = 1$. Suchen Sie die Web-Seite http://www.falstad.com/loadedstring/ auf und hören Sie sich die Lösung an.







[1] Es ist dies keine C^2-Lösung von d'Alemberts Wellengleichung, sondern eine „distributionelle".



3. *Radiale Moden der eingespannten Kugel:* Sei r die euklidische Betragsfunktion auf $\mathbb{R}^3$ und sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Für welche der Funktionen $A = f(t)\, h(r) \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^4\right)$ gilt $\Box A = 0$ und die (homogene) Dirichlet'sche Randbedingung $A(\tau, x) = 0$ für alle $(\tau, x) \in \mathbb{R}^4$ mit $r(x) = R$?

   Lösung: $A(\tau, 0) = \left[\alpha \cos\left(\frac{cn\pi\tau}{R}\right) + \beta \sin\left(\frac{cn\pi\tau}{R}\right)\right]$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und

$$A = \left[\alpha \cos\left(\frac{cn\pi t}{R}\right) + \beta \sin\left(\frac{cn\pi t}{R}\right)\right] \frac{R}{n\pi r} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)$$

   auf $\mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \setminus 0\right)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.