1. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 6. Oktober 2008 / GG

Gradient, Lineare Karten, Gramsche Matrix

1. Sei V ein Vektorraum und sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt von V. Für ein fest gewähltes $k \in V$ sei $f : V \to \mathbb{R}$ mit $f(v) = \sin\langle k, v\rangle$. Zeigen Sie, dass $grad_v(f) = (\cos\langle k, v\rangle)\, k$. Überprüfen Sie, dass $grad_v(f)$ senkrecht auf die Niveaufläche von f steht, die durch den Punkt v geht. (Hinweis: Wählen Sie zur Not eine ONB von V und rechnen Sie mit den zugehörigen Koordinaten; dann sind Sie auf dem vertrauten Boden des $\mathbb{R}^n$.) Spezialisieren Sie nun: $V = \mathbb{R}^2$ und $k = (\omega, q)$ mit $\omega > cq > 0$. Setzen Sie $v = (t, x)$, sodass mit dem „Pseudoskalarprodukt"

$$\langle(\omega, q), (t, x)\rangle = \omega t - qx$$

$f(t, x) = \sin(\omega t - qx)$ folgt. Welche Phasengeschwindigkeit hat die Welle f, wenn (t, x) inertiale Raumzeitkoordinaten des Raumzeitpunktes v sind? (t bezeichnet die Zeit und c die Lichtgeschwindigkeit.) In welchem Sinn steht der „Pseudogradient" von f im Punkt v senkrecht auf die Niveaulinie durch v? (Skizze)

2. Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$. Für die Standardbasis $\underline{e} = (e_1, e_2)$ gilt $e_1 = (1, 0)^t$, $e_2 = (0, 1)^t$. Zwei weitere Basen f und g sind durch

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 + e_2,\ f_2 = e_2, \\ g_1 &= e_1 + e_2,\ g_2 = e_2 - e_1 \end{aligned}$$

gegeben. Sei $\Phi_{\underline{e}} = \left(\phi^1_{\underline{e}}, \phi^2_{\underline{e}}\right)^t = (x, y)^t$ die kontravariante Karte zur Basis $\underline{e}$, d.h. es gilt $id_V = \underline{e} \cdot \Phi_{\underline{e}}$. Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $\psi : V \to \mathbb{R}$ mit $\psi = h(y - x)$ ein differenzierbares Skalarfeld. Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ jenes Skalarprodukt, für das $\underline{e}$ eine ONB ist.

   (a) Zeigen Sie für die zu den Basen $\underline{f}$ und $\underline{g}$ gehörigen kontravarianten Karten

$$\Phi_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \Phi_{\underline{e}} \text{ und } \Phi_{\underline{g}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \Phi_{\underline{e}},$$

$$G_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } G_{\underline{g}} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Skizzieren Sie einige Koordinatenlinien der drei Karten. Bestimmen Sie die Niveaulinien von ψ.

   (b) Zeigen Sie für die partiellen Ableitungen von ψ

$$\begin{aligned} \partial^{\underline{e}}_1\psi &= -h'(y - x) = -\partial^{\underline{e}}_2\psi, \\ \partial^{\underline{f}}_1\psi &= 0,\ \partial^{\underline{f}}_2\psi = h'(y - x), \\ \partial^{\underline{g}}_1\psi &= 0,\ \partial^{\underline{g}}_2\psi = 2h'(y - x). \end{aligned}$$

   Beachten Sie: Obwohl $\phi^1_{\underline{e}} = \phi^1_{\underline{f}}$ gilt, gilt $\partial^{\underline{f}}_1\psi \neq \partial^{\underline{e}}_1\psi$.

   (c) Berechnen Sie das Gradientenvektorfeld von ψ mit der Entwicklungsformel nach einer beliebigen Basis mit den drei Basen $\underline{e}, \underline{f}$ und $\underline{g}$. Kontrollieren Sie, dass die drei Rechnungen übereinstimmend auf $grad(\psi) = h'(y - x)(e_2 - e_1)$ führen.

   (d) Berechnen Sie das Gradientenvektorfeld von ψ bezüglich jenes Skalarproduktes, zu dem $\underline{f}$ eine ONB ist. Lösung:

$$\widetilde{grad}(\psi) = h'(y - x)\, e_2.$$

   Wie kann $\widetilde{grad}(\psi)$ senkrecht auf die Niveaulinien von ψ stehen, wenn dies auch $grad(\psi)$ tut?