$\Box A = 0$ auf $\mathbb{R}^4$: Kugelwellen; $\Box A = j$ auf $\mathbb{R}^3$: Lösung durch Ansatz

1. Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$ und $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}, x \mapsto f(|x|)/|x|$. Zeigen Sie $(\Delta\phi)(x) = f''(|x|)/|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$.

2. Sei $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$ und $A : \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^3 \setminus 0) \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto \psi(t,|x|)/|x|$. Zeigen Sie, dass $\Box A = 0$ genau dann auf $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$ gilt, wenn $\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_r^2\right)\psi = 0$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$. Zu einer lokalen Lösung A existieren also zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$, sodass $A = A_{f,g}$ mit

$$A_{f,g}(t,x) := \frac{1}{|x|}\left[f(|x| - ct) + g(|x| + ct)\right]$$

für alle $(t,x) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$. Lokale Lösungen $A_{f,0}$ (resp. $A_{0,g}$) heißen auslaufend (resp. einlaufend). Warum? I.a. hat $A_{f,g}$ keine stetige Fortsetzung nach $x = 0$ und ergibt daher keine globale Lösung von $\Box A = 0$. Warum? Die Figur 1 zeigt $x \mapsto A_{f,0}(t,x,0,0)$ mit $f(x) = 1/\left(1 + x^2\right)$ für $t \in \{-2, 0, 2, 4, 6, 8\}$ im Bereich $1 < x < 15$.

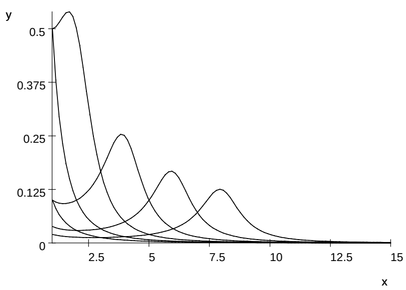

Figure 1: Momentaufnahmen einer auslaufenden lokalen Lösung von $\Box A = 0$

3. Statisch belastete Trommelmembran[1]: Sei $j(t,x) = -1$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^3$. Ansatz: Sei $A \in C^2\left(\mathbb{R}^3 : \mathbb{R}\right)$ so, dass eine Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ existiert, dass $A(t,x) = g(|x|)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^2 \setminus 0\right)$. Zeigen Sie, dass $\Box A = j$ auf $\mathbb{R}^3$ mit der Randbedingung $A(t,x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| = R \in \mathbb{R}_{>0}$ genau dann gilt, wenn $g(r) = \left(r^2 - R^2\right)/4$.

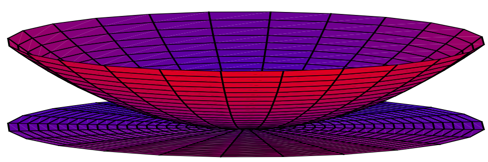

Figure 2: Kreismembran, statisch und gleichförmig belastet

[1] Es ist dies ein Beispiel für ein statisches Randwertproblem. Es sagt im Rahmen der Elastomechanik, dass eine statisch und gleichmäßig belastete Kreismembran die Form eines Rotationsparaboloids annimmt. Spannen Sie eine Frischhaltefolie straff über ein mit Wasser halb gefülltes Glas, erhitzen Sie es in der Mikrowelle und warten Sie die Abkühlung ab.