7. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 19. Nov. 2007 / GG

Komplexe Wegintegration, Residuensatz

1. Sei $R > 0$ und $\gamma_1 : [-2R, 0] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t + R$. Weiter sei $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto R \cdot \exp(it)$. Die stetige, geschlossene, stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : [-2R, \pi] \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \leq 0 \\ \gamma_2(t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

parametrisiert daher einen in der oberen komplexen Halbebene liegenden Halbkreis um 0 (samt Durchmesser). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x + iy) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$$

für $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \frac{2R^3}{3}(2 - \alpha).$$

Nota bene: f ist holomorph $\Leftrightarrow \alpha = 2 \Leftrightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

2. (Residuensatz) Seien $x \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie mithilfe des Residuensatzes

$$\lim_{K \to \infty} \int_{-K}^{K} \frac{\exp(ikx)}{k^2 + \lambda^2} dk = \frac{\pi}{\lambda} e^{-\lambda|x|}.$$

Überprüfen Sie damit den Fourierschen Umkehrsatz und die in Math. Meth. I berechnete Fourier-transformierte von $e^{-\lambda|x|}$:

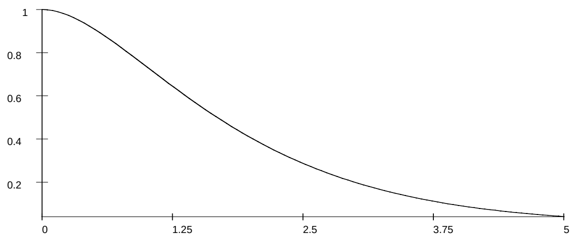
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda|x|} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{k^2 + \lambda^2}.$$

Hinweis: Schließen Sie für $x \geq 0$ den Integrationsweg durch einen Halbkreisbogen in der oberen komplexen Halbebene. Den Fall $x < 0$ führen Sie durch die Substitution $k' = -k$ auf $x > 0$ zurück.

3. (Ein 3d Fourierintegral mit Residuensatz; freiwillig) Sei $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0, \kappa \in \mathbb{R}_{>0}$ und $r = |x|$. Zeigen Sie durch Integration mit Kugelkoordinaten, dass für die 3-dimensionale Kugel K_R um 0 mit Radius $R > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{K_R} \frac{e^{i\langle k,x\rangle}}{|k|^2 + \kappa^2} d^3k &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^R \frac{q^2}{q^2+\kappa^2} \left(\int_0^\pi e^{iqr\cos\theta} \sin\theta d\theta \right) dq \\
&= \frac{i}{r(2\pi)^2} \int_0^R \frac{q}{q^2+\kappa^2} \left(\int_0^\pi \frac{d}{d\theta} e^{iqr\cos\theta} d\theta \right) dq \\
&= \frac{i}{r(2\pi)^2} \int_0^R \frac{q}{q^2+\kappa^2} \left(e^{-iqr} - e^{iqr} \right) dq \\
&= \frac{i}{r(2\pi)^2} \int_{-R}^R \frac{qe^{-iqr}}{(q-i\kappa)(q+i\kappa)} dq \\
&\to \frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r} =: Y(x) \text{ für } R \to \infty.
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus dem Residuensatz, da der ergänzende Halbkreisbogen in der unteren Halbebene im Limes $R \to \infty$ keinen Beitrag liefert. (Siehe Fischer & Kaul, Vol. I, §28.7.4) Zeigen Sie[1], dass $\left(-\Delta + \kappa^2\right) Y = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus 0$. Zeigen Sie für das Flussintegral von $-grad(Y)$ durch die nach außen orientierte 2-Sphäre mit Radius r, dass $\int_{S_r^2} -grad(Y) = (1+\kappa r) e^{-\kappa r}$. Hier der Graph von $(1+x)e^{-x}$ für $0 < x < 5$.



[1] $-(Q/\varepsilon_0)\, grad(Y)$ modelliert das elektrostatische Feld einer Punktladung der Stärke Q, die in ein neutrales, ionisiertes Medium eingebracht ist. Das Medium schirmt die Punktladung nach außen hin zunehmend ab, indem Ionenladung Q_r die Kugel um 0 vom Radius r verlässt. Q_r steigt im Bereich $0 < r < \infty$ monoton von 0 auf Q an. κ heißt Debye-Länge.