6. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 12. November 2007 / GG

Holomorphie; Potenzreihe von ln um 1

1. Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ existiert eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$(\Re f)(x + iy) = x^2 + 2axy + by^2 \tag{1}$$

gilt? Geben Sie zu jedem solchen Paar (a, b) alle holomorphen Funktionen f an, für die Gleichung (1) gilt.

Hinweis: Was lässt sich aus $\Delta(\Re f) = 0$ über b erschließen? Lösen Sie dann mit diesem Wissen die Cauchy-Riemann Gleichungen.

2. Sei $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $g : K_1 \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots$$

Die unendliche Reihe ist durch die geometrische Reihe, die den Konvergenzradius 1 hat, majorisiert. Daher ist g holomorph. Zeigen Sie mithilfe von Ketten- und Quotientenregel, dass für alle $z \in K_1$

$$\frac{d}{dz} \frac{e^{g(z)}}{1 + z} = 0.$$

Schließen Sie daraus, dass $g(z) = \ln(1 + z)$, wobei ln der Hauptzweig der Logarithmusfunktion ist. Welche Potenzreihe hat die Funktion ln um $x \in \mathbb{C}$ mit $x = \Re x > 0$?

Bemerkung, siehe etwa O. Forster, Analysis 1, §22: Für $z = 1$ spezialisiert sich die Potentreihe $g(z)$ auf die alternierende harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Diese konvergiert nach dem Leibnitzkriterium. Nach dem Abel'schen Grenzwertsatz konvergiert sie (wie naiv zu erwarten ist) gegen $\ln(2)$. Für $z = -1$ hingegen spezialisiert sich die Reihe $-g(z)$ zur harmonischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Diese divergiert. (O. Forster, Analysis 1, § 7)