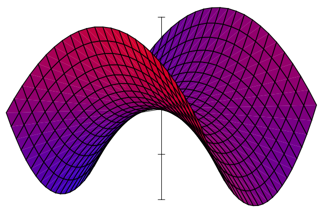
4. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 29. Oktober 2007 / GG

Euklidische Vektoranalysis mit krummlinigen Koordinatensystemen: grad, div, rot, Δ

1. Seien (x, y) die Standardkoordinaten von $\mathbb{R}^2$. Sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\right\}$.

   (a) Sei $f = x^2 - y^2$ auf $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $grad\,(f)$ und Δf (bezüglich des Standardskalarproduktes) auf U unter Benützung von Polarkoordinaten. Kontrollieren Sie ihre Ergebnisse durch eine zweite Berechnung von $grad\,(f)$ und Δf unter Benützung von Standardkoordinaten.

   (b) Sei $f = x/\left(x^2 + y^2\right)$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$. Berechnen Sie $grad\,(f)$ und Δf (bezüglich des Standardskalarproduktes) auf U unter Benützung von Polarkoordinaten. Kontrollieren Sie ihre Ergebnisse durch eine zweite Berechnung von $grad\,(f)$ und Δf unter Benützung von Standardkoordinaten.

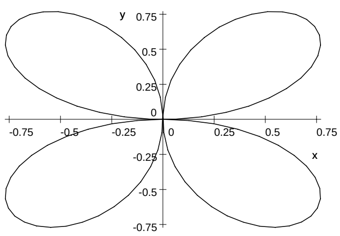


Die Funktion $x^2 - y^2$

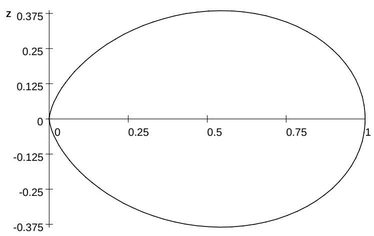
2. Für das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}$ gelte in der Standardkarte (x, y, z) von $\mathbb{R}^3$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$f = \frac{2xy}{r^5}.$$

   (f ist ein Quadrupolpotential.) Auf dem Definitionsbereich U der Kugelkoordinaten $\Phi = (r, \theta, \phi)$ gilt daher $f = \frac{1}{r^3} \sin^2(\theta) \sin(2\phi)$.



Polardiagramm von $\sin(2\phi)$



Polardiagramm von $\sin^2 \theta$

   (a) Berechnen Sie auf U bezüglich des Standardskalarproduktes die Komponenten von $grad\,(f)$ zur Kartenbasis von Φ.

   (b) Leiten Sie aus dem Ergebnis von a) ab, dass $\Delta f = 0$ auf U.

   (c) Zeigen Sie $\Delta f = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ unter Verwendung der Standardkarte.

3. Seien (r, ϕ, z) Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ und sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Auf dem Kartenbereich U von (r, ϕ, z) gelte $X = \frac{f(r)}{r^2} \delta_\phi$. Zeigen Sie (unter Verwendung der Formel für die Rotation in einem krummlinigen Koordinatensystem), dass $rot\,(X) = \frac{f'(r)}{r}(0, 0, 1)$ auf U.