3. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 22. Oktober 2007 / GG

Rotation eines Vortexfeldes; Polarkoordinaten: Kartenbasen, Gramsche Matrix

1. Sei V ein 3-dim Vektorraum. Eine Orientierung und ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ seien gewählt. Sei $n \in V$ mit $|n| = 1$. Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Für $X : V \to V$ gelte[1] für alle $p \in V \setminus \mathbb{R} \cdot n$

$$X(p) = f(|n \times p|) \frac{n \times p}{|n \times p|^2}.$$

Zeigen Sie

$$rot_p(X) = \frac{f'(|n \times p|)}{|n \times p|} n.$$

Hinweis: Rechnen Sie in einer ON-Basis (e_1, e_2, e_3) mit $e_3 = n$. Es gilt dann

$$|n \times p| = \sqrt{x^2(p) + y^2(p)}.$$

Wenn Sie die Geometrie der Situation durchschauen, geht es unter Verwendung der Faulenzerregeln auch beinahe ohne jede Rechnung.

2. Sei $\Psi = (x, y)$ die Standardkarte von $\mathbb{R}^2$ und sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\right\}$ (geschlitzte Ebene). Sei $\Phi = (\rho, \phi)$ die Karte der Polarkoordinaten auf U.

   (a) Skizzieren sie einige Niveaulinien $\rho = const$ bzw. $\phi = const$.

   (b) Drücken Sie die Kartenbasis in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \phi_0)$ durch die Standardbasis aus.

   (c) Zeigen Sie, dass die Funktionalmatrix $\left(\partial_j^\Phi \Psi^i\right)$ überall maximalen Rang hat.

   (d) Berechnen Sie die Gram'sche Matrix[2] G^Φ in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \phi_0)$.

---

[1] Das Feld X gibt das Magnetfeld eines lang gestreckten stromdurchflossenen Drahtes endlicher Dicke wieder. Das Geschwindigkeitsfeld eines Wirbelsturmes gibt es auch etwas besser wieder als der idealisierte Fall mit $f = 1$.

[2] Zum Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^2$.