2. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 15. Oktober 2007 / GG

Kurvenintegrale nichtkonservativer Vektorfelder; Divergenz des Vortexvektorfelds

1. Sei (x, y) die Standardkarte von $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$. Für $L : V \to V$ gelte $L = (-y, x)$ (Drehvektorfeld). Es soll nun mit verschiedenen Methoden gezeigt werden, dass das Vektorfeld L kein Potential hat, d.h., dass *keine* Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $L = grad\,(f)$.

   (a) Direkte Methode: Zeigen Sie, dass die beiden Differentialgleichungen (bezüglich der Standardbasis) $-y = \partial_1 f$ und $x = \partial_2 f$ keine Lösung f haben.

   (b) Indirekt mit $rot\,(grad\,(f)) = 0$: Zeigen Sie, dass L nicht rotationsfrei ist.

   (c) Sei $\gamma_1 : [-R, R] \to V$ mit $\gamma_1(t) = (t, 0)$. Zeigen Sie $\int_{\gamma_1} L = 0$. Sei $\gamma_2 : [0, \pi] \to V$ mit $\gamma_2(t) = (R\cos t, R\sin t)$. Zeigen Sie $\int_{\gamma_2} L = R^2\pi$. Warum folgt daraus, dass L kein Potential hat?

   (d) Sei γ eine Kurve in V, deren Bildmenge der Rand eines achsenparallelen Quadrats mit der Seitenlänge 2ε und mit dem Mittelpunkt $(a, b) \in V$ ist. Die Kurve durchlaufe den Rand im Gegenuhrzeigersinn einmal. Zeigen Sie, dass $\int_\gamma L = 8\varepsilon^2 =$ Doppelte Fläche des Quadrats. Das Integral ist also unabhängig von (a, b).
   Hinweis: Die untere Seite des Quadrats kann folgendermaßen durchlaufen werden
   $$\gamma_1 : [-\varepsilon, \varepsilon] \to V \text{ mit } \gamma_1(t) = (a + t, b - \varepsilon)\,.$$
   Wählen Sie für die drei weiteren Seiten analoge Kurven.

   (e) Sei nun $X = \frac{1}{x^2+y^2} L$ auf $V \setminus 0$. Sei γ wie oben eine Kurve, die den Rand eines (beliebigen) Quadrats im Gegenuhrzeigersinn einmal durchläuft. Zeigen Sie
   $$\int_\gamma X = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } (0,0) \text{ innerhalb des Quadrats liegt} \\ 0 & \text{falls } (0,0) \text{ außerhalb des Quadrats liegt} \end{cases}\,.$$
   Falls γ durch $(0, 0)$ führt, ist $\int_\gamma X$ nicht definiert. Hinweis: Auf der geschlitzten Ebene gilt $X = grad\,(\phi)$.

2. Sei (x, y) die Standardkarte von $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$. Für $L : V \to V$ gelte $L = (-y, x)$ (Drehvektorfeld). Sei $X = \frac{1}{x^2+y^2} L$ auf $V \setminus 0$. Zeigen Sie $div\,(X) = 0$. Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $Y = f\left(x^2 + y^2\right) L$. Zeigen Sie $div\,(Y) = 0$.