## 13. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 21. Jan 2008 / GG

### Besselfunktionen[1]

1. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Seien $c_k \in \mathbb{R}$ so, dass die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ einen Konvergenzradius $\rho > 0$ habe. Es gelte $c_0 \neq 0$. Für die Funktion $y : (0, \rho) \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gelte die Besselsche Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y(x) = 0. \tag{1}$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\alpha = m$ und

$$\frac{y(x)}{c_0 x^m} = 1 - \frac{(x/2)^2}{(m+1)} + \frac{(x/2)^4}{2!(m+1)(m+2)} - \frac{(x/2)^6}{3!(m+1)(m+2)(m+3)} + \ldots$$

   folgt, und somit

$$y(x) = c_0 x^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{m!}{k!(m+k)!} = (c_0 2^m m!) J_m(x)$$

   für alle $x \in (0, \rho)$. Geben Sie die Spezialisierungen der Reihe auf $m = 0$ und $m = 1$ an. Figur 1 zeigt $J_m$ für $m = 0, 1, 2$ (rot, grün, magenta) und die Cosinusfunktion. Für $\nu \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ ist definiert: $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} (x/2)^{2k+\nu}$.

   (b) Für $-\nu \in \mathbb{N}$ ist die Besselsche Reihenformel unsinnig, da $\Gamma(z)$ für $z \in -\mathbb{N}_0$ nicht definiert ist. Wegen $\lim_{z \to -n \in \mathbb{N}_0} 1/\Gamma(z) = 0$ definiert man dann

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}.$$

   Zeigen Sie $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ mit der Substitution $j = k - m$.

   Die Funktion $J_{-m}$ ergänzt also $J_m$ nicht zu einem Fundamentalsystem der Besselgleichung (1). Mitteilung ohne Beweis: Ist $y$ eine von $J_m$ linear unabhängige Lösung von Gleichung (1) auf einem Intervall $(0, \rho)$, so hat $y$ im Gegensatz zu $J_m$ keine stetige Fortsetzung nach $x = 0$. Für $m \in \mathbb{N}$ gilt nämlich $\lim_{x \to 0} x^m y(x) \neq 0$ und für $m = 0$ gilt $\lim_{x \to 0} y(x) / \ln(x) \neq 0$. (Siehe Neumannfunktion $N_m$)

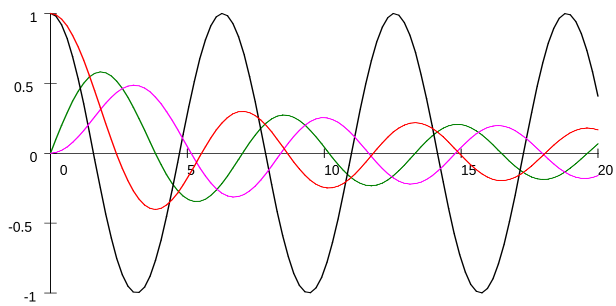


Figure 1: Die Besselfunktionen $J_m$ für $m = 0, 1, 2$ und cos

2. Sei $\nu \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie aus der Reihenformel ab, dass $J_{\nu \pm 1}(x) = \nu J_\nu(x)/x \mp J'_\nu(x)$.

[1] Nach Friedrich Wilhelm Bessel, 1784 - 1846; http://de.wikipedia.org/wiki/Bessel

3. Sei $y : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ eine $C^2$-Funktion und $y(x) = u(x) / \sqrt{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass $y$ genau dann Lösung der Besselschen Diffgl zum Parameter $\nu^2 \geq 0$ ist, wenn

$$u''(x) + q(x)\, u(x) = 0 \text{ mit } q(x) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)}{x^2}. \tag{2}$$

Bemerkung: Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ existiert ein $\xi_\varepsilon > 0$, sodass $q(x) > (1-\varepsilon)^2$ für alle $x > \xi_\varepsilon$. Damit ist ein Nullstellenvergleichssatz auf Lösungen $u$ von (2) anwendbar, der nach sich zieht, dass zwischen je zwei benachbarten Nullstellen von $\cos((1-\varepsilon)x)$ im Bereich $x > \xi_\varepsilon$ eine Nullstelle von $u$ und somit auch eine von $y$ liegt. (Siehe Fischer & Kaul, Vol. II, Kap. II, §4.2.6) Für $\nu^2 = 0$ gilt insbesonders $q(x) > 1$ für alle $x > 0$. Daher liegt zwischen je zwei benachbarten Nullstellen von $\cos(x)$ im Bereich $x > 0$ eine Nullstelle von $J_0$.