11. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 7. Jänner 2008 / GG

1d-Schrödingergleichung; $\Delta_2 u = 0$ mit inhomogener Dirichlet-Randvorgabe

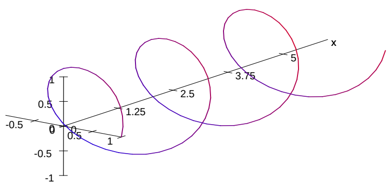
1. Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit $\psi(t,x) = f(t)\, g(x)$ und $f \in C^1(\mathbb{R} : \mathbb{C})$, $g \in C^2(\mathbb{R} : \mathbb{C})$. Es gelte die freie, parameterreduzierte[1], 1-dimensionale Schrödingergleichung

$$\left(i\partial_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 \right) \psi(t,x) = 0.$$

   (a) Zeigen Sie: ψ ist genau dann beschränkt, wenn Zahlen $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $A, B \in \mathbb{C}$ existieren, sodass

$$\psi(t,x) = e^{-i\frac{k^2}{2}t} \left[A e^{ikx} + B e^{-ikx} \right]. \tag{1}$$

   Hier der Graph der Funktion $x \mapsto e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$ für $k = \pi$ und $x \in (0,6)$.



$x \mapsto \exp(i\pi x)$

   Eine Lösung mit $B = 0$ ist somit eine „Linksschraube“, die sich mit wachsender Zeit t mit der Phasengeschwindigkeit[2] $k/2$ in positive x-Richtung verschiebt. Eine Lösung mit $A = 0$ hingegen ist eine „Rechtsschraube“, die mit der Geschwindigkeit $k/2$ in negative x-Richtung wandert. Anders als bei den Lösungen von d'Alemberts Wellengleichung hängt diese Phasengeschwindigkeit von der Wellenzahl k ab!

   (b) Sei ψ wie in Gleichung (1). Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} |\psi(t,x)|^2 &= |A|^2 + |B|^2 + 2\left[\Re\left(A\overline{B}\right) \cos(2kx) - \Im\left(A\overline{B}\right) \sin(2kx) \right], \\ \Im\left[\overline{\psi}\partial_x\psi\right](t,x) &= k\left(|A|^2 - |B|^2 \right). \end{aligned}$$

2. Sei $R := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L_1 \text{ und } 0 < y < L_2 \right\}$. Sei $u : \overline{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $u\,|_R \in \mathcal{C}^2(R : \mathbb{R})$. Auf R gelte $\Delta u = 0$ und auf ∂R die Randvorgabe: $u(x, L_2) = \sin\left(\pi \frac{x}{L_1}\right)$, $u(x,0) = u(0,y) = u(L_1, y) = 0$.

   (a) Zeigen Sie $u(x,y) = \frac{\sin(\pi x/L_1)\sinh(\pi y/L_1)}{\sinh(\pi L_2/L_1)}$ für alle $(x,y) \in \overline{R}$.

   (b) Sei n das nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektorfeld von ∂R. Zeigen Sie[3] $\int_{\partial R} n[u] = 0$.

   (c) Zeigen Sie für die Energie von u

$$\frac{1}{2}\int_0^{L_1} \left(\int_0^{L_2} \left| grad_{(x,y)}(u) \right|^2 dy \right) dx = \frac{\pi}{4\tanh\left(\pi \frac{L_2}{L_1}\right)}.$$

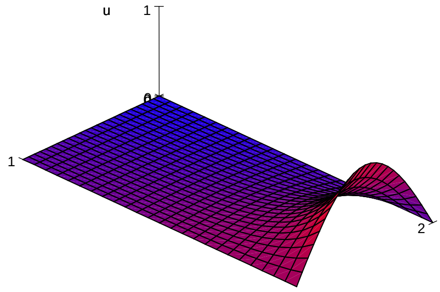
[1] Für die Funktion $\Psi(t,x) = \psi\left(\frac{\hbar t}{m}, x\right)$ gilt dann die physikalisch dimensionierte Schrödingergleichung $\left(i\hbar\partial_t - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\right)\Psi(t,x) = 0$. Hier ist $m > 0$ die Masse des Teilchens und $\hbar$ die Planck'sche Konstante.

[2] In physikalischen Einheiten ist die Phasengeschwindigkeit $\hbar k/2m$.

[3] Ausführlicher notiert ist zu zeigen, dass

$$\int_0^{L_1} \partial_y u(x, L_2)\, dx - \int_0^{L_1} \partial_y u(x,0)\, dx + \int_0^{L_2} \partial_x u(L_1, y)\, dy - \int_0^{L_2} \partial_x u(0,y)\, dy = 0.$$

In der Elektrostatik drückt das die Tatsache aus, dass die Gesamtladung des Randes 0 ist.



u für $L_1 = 1$ und $L_2 = 2$

3. (Freiwillig) Geben Sie die harmonische Funktion u auf dem Rechteck R zur folgenden Randvorgabe an.
$$u(x,0) = \sin\left(2\pi\frac{x}{L_1}\right), u\left(x, L_2\right) = \alpha\sin\left(\pi\frac{x}{L_1}\right), u(0,y) = u(L_1,y) = 0.$$
Hinweis: Nutzen Sie die Spiegelungs- und Translationsinvarianz von Δ aus. Lösung:
$$u\left(x,y\right) = \sin\left(2\pi x/L_1\right)\frac{\sinh\left(2\pi\left(L_2 - y\right)/L_1\right)}{\sinh\left(2\pi L_2/L_1\right)} + \alpha\sin\left(\pi x/L_1\right)\frac{\sinh\left(\pi y/L_1\right)}{\sinh\left(\pi L_2/L_1\right)}.$$