**10. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 10. Dez. 2007 / GG**

**Anfangs-Randwertprobleme zu $\Box A = 0$ :**

1. *Die eingespannte Saite:* Bestimmen Sie eine Funktion $A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times (0, L) : \mathbb{R})$ mit $\Box A = 0$ und

   (a) $lim_{x\downarrow 0} A(t,x) = lim_{x\uparrow L} A(t,x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (homogene Dirichlet'sche Randbedingung),

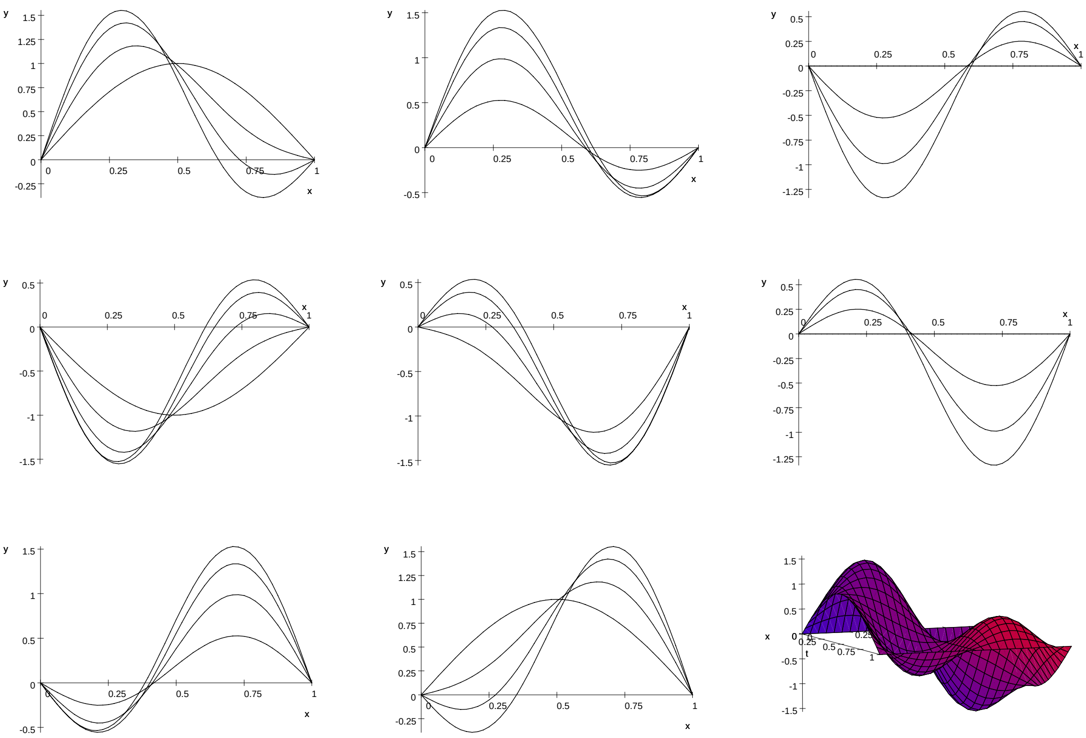
   (b) $A(0,x) = u(x) := aL\sin\left(\pi\frac{x}{L}\right)$ und $\partial_t A(0,x) = v(x) := 2\pi bc\sin\left(2\pi\frac{x}{L}\right)$ für alle $x \in (0,L)$. Es gelte $a, b \in \mathbb{R}$. (Anfangsbedingung).

   Beachten Sie, dass $lim_{x\downarrow 0} v(x) = lim_{x\uparrow L} v(x) = 0$ und $\lim_{x\downarrow 0} u''(x) = lim_{x\uparrow L} u''(x) = 0$. Warum ist das von Bedeutung?

   Lösung:
   $$A(t,x) = L\left\{a\cos\left(\pi\frac{ct}{L}\right)\sin\left(\pi\frac{x}{L}\right) + b\sin\left(2\pi\frac{ct}{L}\right)\sin\left(2\pi\frac{x}{L}\right)\right\}.$$

   Gibt es weitere Lösungen $A$? Ist für festes $x$ die Abbildung $t \mapsto A(t,x)$ periodisch? Falls ja, hängt die (kleinste) Periode von $x$ ab?

   Hier sind der 3d-Graph und einige Momentaufnahmen der Schwingung $A/L$ für $ct/L = n/16$ für $n = 0, 1, 2, \ldots 32$ und für $a = b = 1$. Suchen Sie die Web-Seite http://www.falstad.com/loadedstring/ auf und hören Sie sich die Lösung an.




2. *Radiale Moden der eingespannten Kugel:* Sei $r$ die euklidische Betragsfunktion auf $\mathbb{R}^3$ und sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Für welche der Funktionen $A = f(t)\,h(r) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^4)$ gilt $\Box A = 0$ und die (homogene) Dirichlet'sche Randbedingung $A(\tau, x) = 0$ für alle $(\tau, x) \in \mathbb{R}^4$ mit $r(x) = R$?

   Lösung: $A(\tau, 0) = \left[\alpha\cos\left(\frac{cn\pi\tau}{R}\right) + \beta\sin\left(\frac{cn\pi\tau}{R}\right)\right]$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und
   $$A = \left[\alpha\cos\left(\frac{cn\pi t}{R}\right) + \beta\sin\left(\frac{cn\pi t}{R}\right)\right]\frac{R}{n\pi r}\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)$$
   auf $\mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \setminus 0\right)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.