

Gradient im euklidischen Raum: Lineare Karten, Gramsche Matrix

1. Sei $V = \mathbb{R}^{2 \times 1}$. Für die Standardbasis $\underline{e} = (e_1, e_2)$ gilt $e_1 = (1, 0)^t$, $e_2 = (0, 1)^t$. Zwei weitere Basen \underline{f} und \underline{g} sind durch

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 + e_2, & f_2 &= e_2, \\ g_1 &= e_1 + e_2, & g_2 &= e_2 - e_1 \end{aligned}$$

gegeben. Sei $\Phi_{\underline{e}} = (\phi_{\underline{e}}^1, \phi_{\underline{e}}^2)^t = (x, y)^t$ die kontravariante Karte zur Basis \underline{e} , d.h. es gilt $id_V = \underline{e} \cdot \Phi_{\underline{e}}$. Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\psi = h(y - x)$ ein differenzierbares Skalarfeld. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jenes Skalarprodukt, für das \underline{e} eine ONB ist.

- (a) Zeigen Sie für die zu den Basen \underline{f} und \underline{g} gehörigen kontravarianten Karten

$$\begin{aligned} \Phi_{\underline{f}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \Phi_{\underline{e}} \quad \text{und} \quad \Phi_{\underline{g}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \Phi_{\underline{e}}, \\ G_{\underline{f}} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G_{\underline{g}} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie einige Koordinatenlinien der drei Karten. Bestimmen Sie die Niveaulinien von ψ .

- (b) Zeigen Sie für die partiellen Ableitungen von ψ

$$\begin{aligned} \partial_1^{\underline{e}} \psi &= -h'(y - x) = -\partial_2^{\underline{e}} \psi, \\ \partial_1^{\underline{f}} \psi &= 0, \quad \partial_2^{\underline{f}} \psi = h'(y - x), \\ \partial_1^{\underline{g}} \psi &= 0, \quad \partial_2^{\underline{g}} \psi = 2h'(y - x). \end{aligned}$$

Beachten Sie: Obwohl $\phi_{\underline{e}}^1 = \phi_{\underline{f}}^1$ gilt, gilt $\partial_1^{\underline{f}} \psi \neq \partial_1^{\underline{e}} \psi$.

- (c) Berechnen Sie das Gradientenvektorfeld von ψ mit der Entwicklungsformel nach einer beliebigen Basis mit den drei Basen \underline{e} , \underline{f} und \underline{g} . Kontrollieren Sie, dass die drei Rechnungen übereinstimmend auf $grad(\psi) = h'(y - x)(e_2 - e_1)$ führen.
- (d) Berechnen Sie das Gradientenvektorfeld von ψ bezüglich jenes Skalarproduktes, zu dem \underline{f} eine ONB ist. Lösung:

$$\widetilde{grad}(\psi) = h'(y - x)e_2.$$

Wie kann $\widetilde{grad}(\psi)$ senkrecht auf die Niveaulinien von ψ stehen, wenn dies auch $grad(\psi)$ tut?