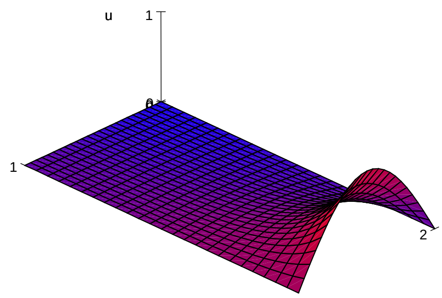
9. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 11. & 12. Dez 2006 / GG

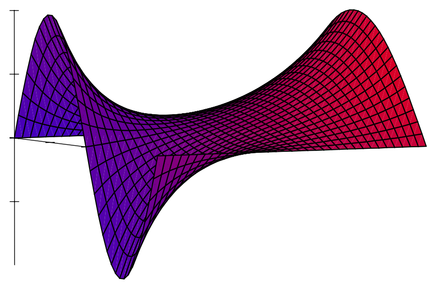
Inhomogene Dirichlet-Randwertprobleme[1]

1. Sei $R := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L_1 \text{ und } 0 < y < L_2\right\}$. Sei $u : \overline{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $u\mid_R \in \mathcal{C}^2(R:\mathbb{R})$. Auf R gelte $\Delta u = 0$ und auf ∂R die Randvorgabe: $u(x, L_2) = \sin\left(\pi\frac{x}{L_1}\right), u(x,0) = u(0,y) = u(L_1,y) = 0$. Zeigen Sie $u(x,y) = \frac{\sin(\pi x/L_1)\sinh(\pi y/L_1)}{\sinh(\pi L_2/L_1)}$ für alle $(x,y) \in \overline{R}$. Ist $u(x, L_2) = x(L_1 - x)$ (Skizze!) eine zulässige Randvorgabe?



u für $L_1 = 1$ und $L_2 = 2$

2. Geben Sie die harmonische Funktion u auf dem Rechteck R zur folgenden Randvorgabe an.
$$u(x,0) = \sin\left(2\pi\frac{x}{L_1}\right), u(x, L_2) = \alpha\sin\left(\pi\frac{x}{L_1}\right), u(0,y) = u(L_1,y) = 0.$$
Hinweis: Nutzen Sie die Spiegelungs- und Translationsinvarianz von Δ aus. Lösung:
$$u(x,y) = \sin(2\pi x/L_1)\frac{\sinh(2\pi(L_2-y)/L_1)}{\sinh(2\pi L_2/L_1)} + \alpha\sin(\pi x/L_1)\frac{\sinh(\pi y/L_1)}{\sinh(\pi L_2/L_1)}.$$



3. Sei $R := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L_1 \text{ und } 0 < y < L_2\right\}$. Sei $A : \mathbb{R} \times \overline{R} \to \mathbb{R}$ stetig und C^2-Lösung von $\Box A = 0$ auf $\mathbb{R} \times R$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ erfülle A auf ∂R die Randvorgabe $A(t,\cdot) = h \in \mathcal{C}(\partial R)$. Sei $u \in \mathcal{C}(\overline{R}) \cap \mathcal{C}^2(R)$ die eindeutige Lösung von $\Delta u = 0$ auf R mit $u = h$ auf ∂R. Zeigen Sie
$$A(t,x,y) = u(x,y) + \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \left[A_{n,m}\cos(\omega_{n,m}t) + B_{n,m}\sin(\omega_{n,m}t)\right]\sin\left(n\pi\frac{x}{L_1}\right)\sin\left(m\pi\frac{y}{L_2}\right)$$
mit $\omega_{n,m} = c\pi\sqrt{\left(\frac{n}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_2}\right)^2}$ und $A_{n,m}$ und $B_{n,m} \in \mathbb{R}$. Moral: Das Frequenzspektrum eines inhomogen Randwertproblems stimmt also mit jenem des zugehörigen homogenen Problems überein.

[1] Anwendungen: inhomogen vorgespannte Rechteckmembran; Wellen im Hohlleiter