

8. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 4. & 5. Dez. 2006 / GG

Randwertprobleme zu $\square A = 0$:

1. Die eingespannte Saite: Bestimmen Sie eine Funktion $A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times (0, L) : \mathbb{R})$ mit $\square A = 0$ und

- (a) $\lim_{x \downarrow 0} A(t, x) = \lim_{x \uparrow L} A(t, x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (homogene Dirichlet'sche Randbedingung),
- (b) $A(0, x) = u(x) := aL \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$ und $\partial_t A(0, x) = v(x) := 2\pi bc \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right)$ für alle $x \in (0, L)$. Es gelte $a, b \in \mathbb{R}$. (Anfangsbedingung).

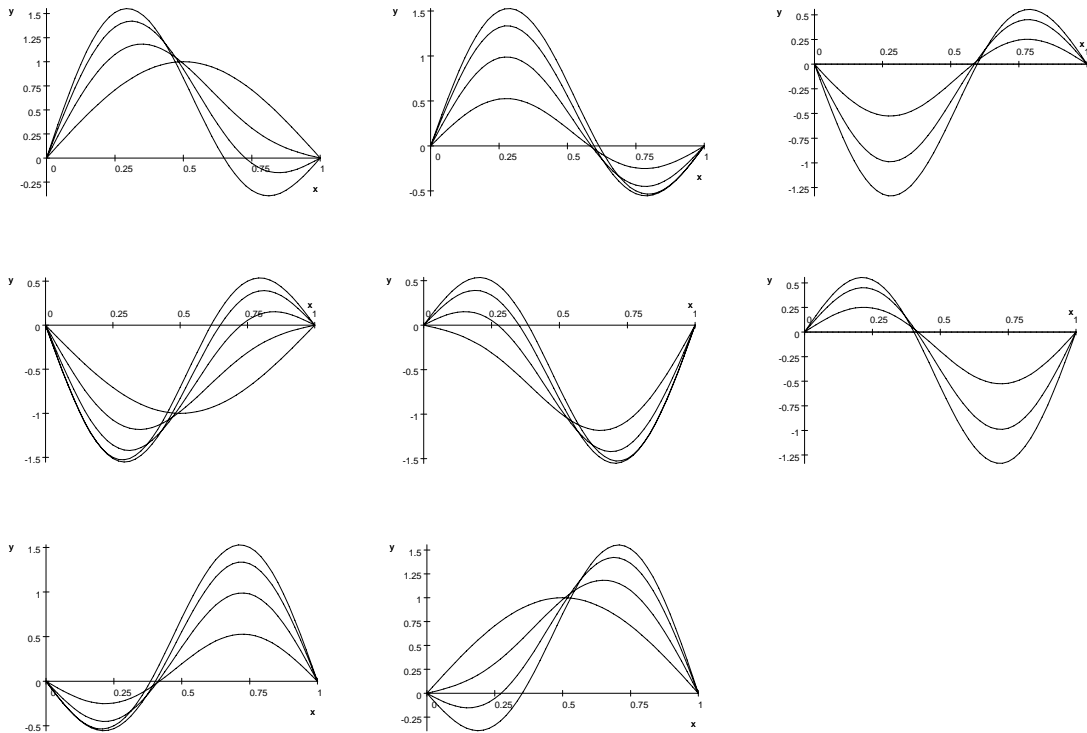
Beachten Sie, dass $\lim_{x \downarrow 0} v(x) = \lim_{x \uparrow L} v(x) = 0$ und $\lim_{x \downarrow 0} u''(x) = \lim_{x \uparrow L} u''(x) = 0$. Warum ist das von Bedeutung?

Lösung:

$$A(t, x) = L \left\{ a \cos\left(\pi \frac{ct}{L}\right) \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) + b \sin\left(2\pi \frac{ct}{L}\right) \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right) \right\}.$$

Gibt es weitere Lösungen A ? Ist für festes x die Abbildung $t \mapsto A(t, x)$ periodisch? Falls ja, hängt die (kleinste) Periode von x ab?

Hier noch einige Momentaufnahmen der Schwingung A/L für $ct/L = n/16$ für $n = 0, 1, 2, \dots, 32$ und für $a = b = 1$.



2. Radiale Moden der eingespannten Kugel: Sei r die euklidische Betragsfunktion auf \mathbb{R}^3 und sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Für welche Funktionen $A = f(t)h(r) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^4)$ gilt $\square A = 0$ und die (homogene) Dirichlet'sche Randbedingung $A(\tau, x) = 0$ für alle $(\tau, x) \in \mathbb{R}^4$ mit $r(x) = R$?

Lösung: $A(\tau, 0) = \left[\alpha \cos\left(\frac{cn\pi\tau}{R}\right) + \beta \sin\left(\frac{cn\pi\tau}{R}\right) \right]$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und

$$A = \left[\alpha \cos\left(\frac{cn\pi t}{R}\right) + \beta \sin\left(\frac{cn\pi t}{R}\right) \right] \frac{R}{n\pi r} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)$$

auf $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.