6. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 20. & 21. Nov. 2006 / GG

$\Box A = 0$ auf $\mathbb{R}^2$: Lösungsansätze, d'Alemberts Lösungsformel

1. Seien $c, k \in \mathbb{R}_{>0}$ und $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto f(t) \sin(kx)$ mit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. Sei L_k die Menge aller solchen Funktionen A, für die
$$\left(\frac{1}{c^2} (\partial_t)^2 - (\partial_x)^2 \right) A = 0.$$
   (a) Bestimmen Sie L_k. Lösung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
   $$A_{a,b}(t, x) := (a \cos(ckt) + b \sin(ckt)) \sin(kx)$$
   für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $L_k = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Figur 1 zeigt $x \mapsto A_{1,0}(t, x)$ für $k = 1 = c$ zu den Zeiten $t \in \left\{0, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}, \pi\right\}$.

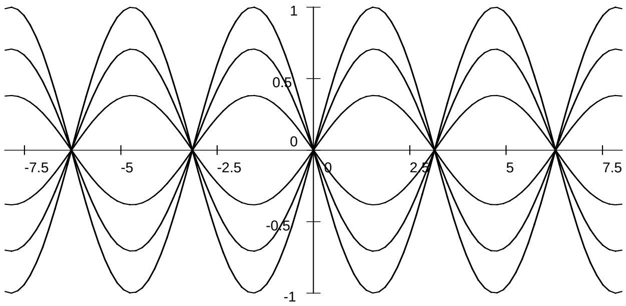

Figure 1: Schnappschüsse einer stehenden Welle

   (b) Für welche $A \in L_k$ gilt $A(0, x) = \sin(kx)$ und $\partial_t A(0, x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Lösung: $A(t, x) = \cos(ckt) \sin(kx)$.
   (c) Für welche $A \in L_k$ gilt $A(0, x) = 0$ und $\partial_t A(0, x) = \frac{1}{\tau} \sin(kx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Hier ist $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$. Lösung: $A(t, x) = \frac{1}{ck\tau} \sin(ckt) \sin(kx)$.
   (d) Wie muss f gewählt werden, wenn in der Problemstellung $\sin(kx)$ durch $(kx)^3$ ersetzt wird? Lösung: $f = 0$.
   (e) Wie lautet L_k, wenn in der Problemstellung $\sin(kx)$ durch $\exp(kx)$ ersetzt wird? Lösung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $A_{a,b}(t, x) := (a \exp(ckt) + b \exp(-ckt)) \exp(kx)$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $L_k = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

2. Kontrollieren Sie für $A \in L_k$ von Beispiel 1a) oder 1b) die Formel von d'Alembert
$$A(t, x) = \frac{1}{2} \{u(x + ct) + u(x - ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi) d\xi.$$
   Diese Formel drückt *jede* $\mathcal{C}^2$-Lösung der Wellengleichung auf $\mathbb{R}^2$ durch ihre Anfangswerte $A(0, x) = u(x)$ und $\partial_t A(0, x) = v(x)$ aus. Es gilt dabei $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ und $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. Geben Sie die Zerlegung von $A \in L_k$ in einen links- und einen rechtsläufigen Anteil an.