5. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 13. &14. Nov. 2006 / GG

Komplexe Wegintegration, Residuensatz

1. Sei $R > 0$ und $\gamma_1 : [-2R, 0] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t + R$. Weiter sei $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto R \cdot \exp(it)$. Die stetige, geschlossene, stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : [-2R, \pi] \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \leq 0 \\ \gamma_2(t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

parametrisiert daher einen in der oberen komplexen Halbebene liegenden Halbkreis um 0 (samt Durchmesser). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x + iy) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$$

für $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \frac{2}{3} R^3 (2 - \alpha).$$

Nota bene: f ist holomorph $\Leftrightarrow \alpha = 2 \Leftrightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

2. Seien $r > 0$ und $\kappa > 0$. Zeigen Sie mithilfe des Residuensatzes[1]

$$\lim_{K \to \infty} \int_{-K}^{K} \frac{\exp(ikr)}{k^2 + \kappa^2} dk = \frac{\pi}{\kappa} e^{-\kappa r}.$$

[1] Schließen Sie den Integrationsweg durch einen Halbkreisbogen in der *oberen* komplexen Halbebene.