4. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 6. & 7. November 2006 / GG

Holomorphie; Potenzreihe von $\ln$ **um** 1

1. Für welche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ existiert eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$(\Re f)(x + iy) = x^2 + 2axy + by^2 \tag{1}$$

gilt? Geben Sie zu jedem solchen Paar (a,b) alle holomorphen Funktionen f an, für die Gleichung (1) gilt.

Hinweis: Was lässt sich aus $\Delta(\Re f) = 0$ über b erschließen? Lösen Sie dann mit diesem Wissen die Cauchy-Riemann Gleichungen.

2. Sei $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $g : K_1 \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Die unendliche Reihe ist durch die geometrische Reihe, die den Konvergenzradius 1 hat, majorisiert. Daher ist g holomorph. Zeigen Sie mithilfe von Ketten- und Quotientenregel, dass für alle $z \in K_1$

$$\frac{d}{dz} \frac{e^{g(z)}}{1+z} = 0.$$

Schließen Sie daraus, dass $g(z) = \ln(1+z)$, wobei $\ln$ der Hauptzweig der Logarithmusfunktion ist. Welche Potenzreihe hat die Funktion $\ln$ um einen allgemeinen Punkt $x \in \mathbb{C}$ mit $x = \Re x > 0$?