3. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 23. & 24. Oktober 2006 / GG

Komplexe Zahlen, Wurzel und Holomorphie

1. Seien $w, z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $w \cdot z = z \cdot w, \quad |w \cdot z| = |w|\,|z|\,, \quad |1/z| = 1/\,|z|\,.$
2. Geben Sie für die (vier) Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die $z^4 = -1$ gilt, die folgenden Größen an: $|z|\,, \Re z, \Im z, \arg(z)\,.$
3. $\arg\left(1 + i\sqrt{3}\right) =?, \quad \arg\left(\sqrt{3} - i\right) =?$ Berechnen Sie Betrag und Argument von $\sqrt[3]{1 + i\sqrt{3}}$ und von $\sqrt[3]{\sqrt{3} - i}$ für den Hauptzweig der Wurzelfunktion.
4. Kontrollieren Sie für die folgenden Funktionen f, ob die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten.
   (a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$.
   (b) $f : \mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/z$.
   (c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sin(z)\,.$
   (d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$ und festes $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Legen Sie eine Liste jener harmonischen Funktionen an, die dieses Beispiel abwirft. Geben Sie auch die Kartenausdrücke dieser Funktionen in Polarkoordinaten an.

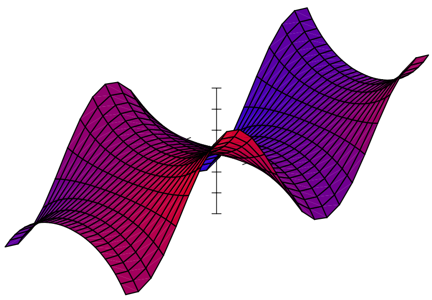

Figure 1: Die harmonische Funktion $\sin(x)\cosh(y)$