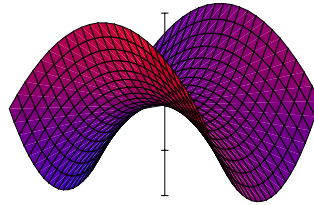


Euklidische Vektoranalysis mit krummlinigen Koordinatensystemen: grad, div, Δ

1. Seien (x, y) die Standardkoordinaten von \mathbb{R}^2 . Sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\}$.
 - (a) Sei $f = x^2 - y^2$ auf \mathbb{R}^2 . Berechnen Sie $\text{grad}(f)$ und Δf (bezüglich des Standardskalarproduktes) auf U unter Benützung von Polarkoordinaten. Kontrollieren Sie ihre Ergebnisse durch eine zweite Berechnung von $\text{grad}(f)$ und Δf unter Benützung von Standardkoordinaten.
 - (b) Sei $f = x/(x^2 + y^2)$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$. Berechnen Sie $\text{grad}(f)$ und Δf (bezüglich des Standardskalarproduktes) auf U unter Benützung von Polarkoordinaten. Kontrollieren Sie ihre Ergebnisse durch eine zweite Berechnung von $\text{grad}(f)$ und Δf unter Benützung von Standardkoordinaten.
 - (c) Sei $f = x^2 + y^2$. Berechnen Sie $\text{grad}(f)$ und Δf (bezüglich des Standardskalarproduktes) auf U unter Benützung von parabolischen Koordinaten. Kontrollieren Sie ihre Ergebnisse durch eine zweite Berechnung von $\text{grad}(f)$ und Δf unter Benützung von Standardkoordinaten.



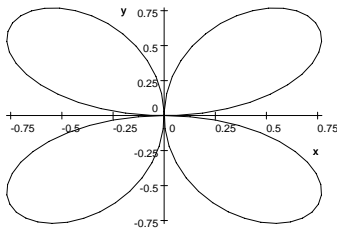
Die Funktion $x^2 - y^2$

2. Für das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ gelte in der Standardkarte (x, y, z) von \mathbb{R}^3 mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

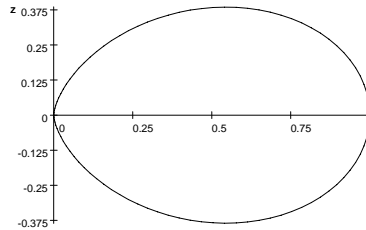
$$f = \frac{2xy}{r^5}.$$

(f ist ein Beispiel für ein Quadrupolpotential.) Auf dem Definitionsbereich U der Kugelkoordinaten $\Phi = (r, \theta, \phi)$ gilt daher

$$f = \frac{1}{r^3} \sin^2(\theta) \sin(2\phi).$$



Polardiagramm von $\sin(2\phi)$



Polardiagramm von $\sin^2 \theta$

- (a) Berechnen Sie auf U bezüglich des Standardskalarproduktes die Komponenten von $\text{grad}(f)$ zur Kartenbasis von Φ .
- (b) Leiten Sie aus dem Ergebnis von a) ab, dass $\Delta f = 0$ auf U .
- (c) Zeigen Sie $\Delta f = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ unter Verwendung der Standardkarte.