11. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 15. & 16. Jan 2007 / GG

Distributionen

1. Zeigen Sie für die folgenden Funktionenfolgen $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $g_k \in C^\infty(\mathbb{R})$, dass für alle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_k(x) f(x)\, dx = f(0)$$

gilt. Die Folgen von regulären Distributionen $(\widetilde{g_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren also schwach gegen Diracs δ-Distribution. (Man sagt: $(\widetilde{g_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist δ-Folge.)

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \frac{1}{\pi}\frac{k}{1+k^2x^2}, \\ g_k(x) &= k\exp\left(-\pi k^2 x^2\right), \\ g_k(x) &= \frac{k}{\pi}\left(\frac{\sin(kx)}{kx}\right)^2. \end{aligned}$$

Hinweis: Nach Math. Meth. 1, Kap. Fourierintegraltransformation gilt: $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi$.

2. Sei $f \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Versuchen Sie, den folgenden formal notierten Ausdrücken Sinn zu geben.

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \delta(x-a)\,\delta(x-y)\, f(x,y)\, dxdy, \\ &\int_{\mathbb{R}^2} \delta'(x-a)\,\delta(x-y)\, f(x,y)\, dxdy, \\ &\int_{\mathbb{R}^2} \delta(x-y)\, f(x,y)\, dxdy. \end{aligned}$$

3. Sei $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und $h \in C^1(\mathbb{R})$. Die Funktion h habe in jedem endlichen Intervall nur endlich viele Nullstellen. Es gelte $h'(x_i) \neq 0$ für alle Nullstellen x_i von h. Sei $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ lokal integrabel. Die Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine δ-Folge. Machen Sie plausibel, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_k(h(x))\, f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|h'(x_i)|} f(x_i), \tag{1}$$

wobei $\{x_1, \dots x_n\}$ die Nullstellenmenge von h in einem endlichen Intervall ist, außerhalb dessen $f = 0$ gilt. Hinweis: Das Integral wird bei wachsendem k von immer kleiner werdenden x-Intervallen um die Nullstellen von h herum bestimmt. Führen Sie um jede Nullstelle von h die Funktion h als (lokale) Integrationsvariable ein.

4. Leiten Sie aus Gleichung (1) die folgenden formal notierten Spezialfälle ab. Dabei seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax-b)\, f(x)\, dx &= \frac{1}{a} f(b/a), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x^2-a^2\right) f(x)\, dx &= \frac{1}{2a}\left(f(a) + f(-a)\right). \end{aligned}$$

5. Sei $f \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^3\right)$. Versuchen Sie, dem folgenden formal notierten Ausdruck Sinn zu geben. Dabei sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta\left(|x|^2 - a^2\right) f(x)\, d^3x$$