**10. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 8. & 9. Jan 2007 / GG**

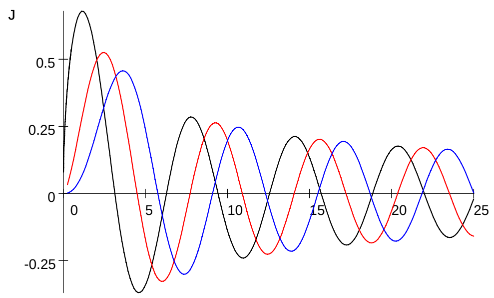
**Kugelfunktionen, Besselfunktionen und Multipolentwicklung**

1. Sei $Y \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^3 \setminus 0 : \mathbb{R}\right)$ dehnungsinvariant. Sei $J_\nu$ die Besselfunktion der Ordnung $\nu$. Bestimmen Sie das kleinste $k > 0$, sodass für

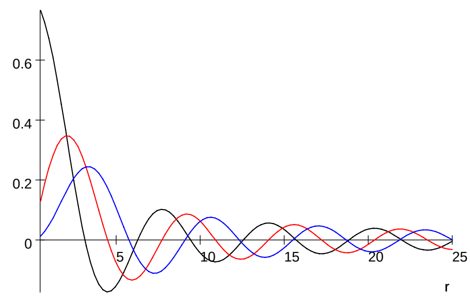
$$A(t,x) = f(t)\frac{J_{3/2}\left(k\,|x|\right)}{\sqrt{k\,|x|}}Y(x)$$

auf $\mathbb{R}^4$ die Wellengleichung $\Box A = 0$ und $A(t,x) = 0$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ mit $|x| = R$ gilt. Verwenden Sie

$$J_{l+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^l \frac{2}{\pi} x^{l+\frac{1}{2}} \left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^l \left[\frac{\sin x}{x}\right].$$




Halbzahlige Besselfunktionen $J_{\frac{1}{2}}, J_{\frac{3}{2}}, J_{\frac{5}{2}}$




$r \mapsto J_{\frac{n}{2}}(r)/\sqrt{r}$ für $n = 1, 2, 3$

2. Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ mit $|y| < |x|$ und mit $\langle x, y\rangle = |x|\cdot|y|\cdot\cos(\theta)$. Dann gilt

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x|}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^l \cdot P_l\left(\cos(\theta)\right). \tag{1}$$

Beweisen Sie diese Behauptung in den folgenden drei Schritten:

(a) Zeigen Sie zunächst, dass für die Funktion $g_y : \mathbb{R}^3 \setminus y \to \mathbb{R}$ mit $g_y(x) = |x-y|^{-1}$ im Gebiet $|x| > |y|$

$$g_y(x) = \frac{1}{|x|}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^l \cdot C_l\left(\cos(\theta)\right)$$

mit stetigen Funktionen $C_l : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gilt.

(b) Wir wissen, dass $g_y$ eine Lösung der Laplacegleichung auf $\mathbb{R}^3 \setminus y$ ist. Leiten Sie daraus ab, dass $C_l$ eine Lösung der Legendre Differentialgleichung mit $\lambda = l(l+1)$ ist.

(c) Verifizieren Sie durch Spezialisierung der Reihenentwicklung von $g_y(x)$ auf den Fall $x = \alpha y$ mit $\alpha > 1$, dass $C_l(1) = 1$. Damit gilt also $C_l = P_l$ auf $[-1,1]$.

Bemerkung: $g_y$ heißt daher die „erzeugende Funktion" der Legendrepolynome. Sie gibt bis auf einen konstanten Faktor das elektrische Potentialfeld, das eine in $y$ ruhende Punktladung mit sich trägt. Gleichung (1) gibt in der Elektrostatik die Multipolentwicklung dieser Potentialfunktion im Bereich $|x| > |y|$. (Außenraumentwicklung; Vertauschen von $x$ mit $y$ ergibt die Innenraumentwicklung.)