1. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 9. & 10. Oktober 2006 / GG

Krummlinige Koordinaten im euklidischen Raum: Kartenbasen, Gramsche Matrix

1. Sei $\Psi = (x, y)$ die Standardkarte von $\mathbb{R}^2$ und sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\}$ (geschlitzte Ebene). Sei $\Phi = (\rho, \phi)$ die Karte der Polarkoordinaten auf U.

   (a) Skizzieren sie einige Niveaulinien $\rho = const$ bzw. $\phi = const$.

   (b) Drücken Sie die Kartenbasis in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \phi_0)$ durch die Standardbasis aus.

   (c) Zeigen Sie, dass die Funktionalmatrix $\left(\partial_j^\Phi \Psi^i\right)$ überall maximalen Rang hat.

   (d) Berechnen Sie die Gram'sche Matrix[1] G^Φ in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \phi_0)$.

2. Sei $\Psi = (x, y)$ die Standardkarte von $\mathbb{R}^2$ und sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\}$ (geschlitzte Ebene). Für die „parabolische" Karte $\Phi = (u, v)$ gilt auf U

$$x = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right), \quad y = uv \text{ mit } v > 0.$$

   (a) Skizzieren sie einige Niveaulinien $u = const$ bzw. $v = const$.

   (b) Drücken Sie die Kartenbasis in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (u_0, v_0)$ durch die Standardbasis aus.

   (c) Zeigen Sie, dass die Funktionalmatrix $\left(\partial_j^\Phi \Psi^i\right)$ überall maximalen Rang hat.

   (d) Berechnen Sie die Gram'sche Matrix G^Φ in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (u_0, v_0)$.

[1] Zum Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^2$.