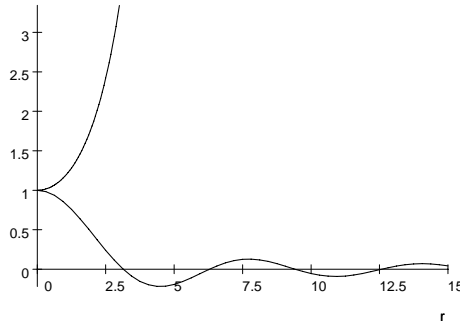


**Die drehinvarianten Eigenfunktionen von  $\Delta$  auf  $\mathbb{R}^3$  und die drehinvarianten Eigenschwingungen eines Randwertproblems zu  $\square A = 0$  auf  $\mathbb{R} \times \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$**

1. Sei  $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 : \mathbb{R})$  so, dass ein  $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = h(|x|)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^3$  existiert. Bestimmen Sie die Menge aller solchen Funktionen  $g$  mit  $\Delta g = \lambda g$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Lösung:

- (a) Für  $\lambda > 0$  gilt  $\Delta g = \lambda g$  auf  $\mathbb{R}^3$  genau dann, wenn ein  $A \in \mathbb{R}$  existiert, sodass  $g(x) = A \sinh(\sqrt{\lambda}|x|) / |x|$  für alle  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ .
- (b)  $\lambda = 0$ : Es gilt  $\Delta g = 0$  auf  $\mathbb{R}^3$  genau dann, wenn ein  $A \in \mathbb{R}$  existiert, sodass  $g(x) = A$  für alle  $x \in \mathbb{R}^3$ .
- (c) Für  $\lambda < 0$  gilt  $\Delta g = \lambda g$  auf  $\mathbb{R}^3$  genau dann, wenn ein  $A \in \mathbb{R}$  existiert, sodass  $g(x) = A \sin(\sqrt{-\lambda}|x|) / |x|$  für alle  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ .



Graphen von  $\sinh(r)/r$  (strichliert) und von  $\sin(r)/r$

2. Benützen Sie die Funktionen  $g$  aus Beispiel 1, um Funktionen  $A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : \mathbb{R})$  des Typs  $A(t, x) = f(t)g(x)$  mit  $\square A = 0$  zu konstruieren. Welche davon sind periodisch in  $t$ ? Lösung: Für  $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gilt eine der folgenden Aussagen

- (a)  $A(t, x) = [\alpha \exp(ckt) + \beta \exp(-ckt)] \sinh(k|x|) / |x|$  für alle  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \setminus 0$  mit  $k \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . (Aperiodisch in  $t$ )
- (b)  $A(t, x) = \alpha + \beta t$  für alle  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . (Aperiodisch in  $t$ )
- (c)  $A(t, x) = [\alpha \cos(ckt) + \beta \sin(ckt)] \sin(k|x|) / |x|$  für alle  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \setminus 0$  mit  $k \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . (Periodisch in  $t$ )
- (d) (Optional) Welche Funktionen  $f$  und  $g$  in Beispiel 2 von Blatt 3 ergeben diese drei Lösungstypen?

3. Sei  $R \in \mathbb{R}_{>0}$ . Für welche der Funktionen  $A \neq 0$  aus Beispiel 2 gilt die (homogene) Dirichlet'sche Randbedingung  $A(t, x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^3$  mit  $|x| = R$ ? Lösung: Nur Funktionen des Typs c) mit  $kR \in \pi \cdot \mathbb{N}$  mit  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ . Mit welchen „Eigenfrequenzen“ schwingen diese Funktionen?